

## 무인자전거 최적자세제어

# Optimal Posture Control for Unmanned Bicycle

양지혁, 이상용, 김석윤, 이영삼, 권오규\*  
(Ji-Hyuk Yang<sup>1</sup>, Sang-Yong Lee<sup>1</sup>, Seuk-Yun Kim<sup>1</sup>, Young Sam Lee<sup>1</sup>, and Oh-Kyu Kwon<sup>1</sup>)

<sup>1</sup>Inha University

**Abstract:** In this paper, we propose an optimal posture control law for an unmanned bicycle by deriving linear bicycle model from fully nonlinear differential equations. We calculate each equilibrium point of a bicycle under any given turning radius and angular speed of rear wheel. There is only one equilibrium point when a bicycle goes straight, while there are a lot of equilibrium points in case of turning. We present an optimal equilibrium point which makes the leaning input minimum when a bicycle is turning. As human riders give rolling torque by moving center of gravity of a body, many previous studies use a movable mass to move center of gravity like humans do. Instead we propose a propeller as a new leaning input which generates rolling torque. The propeller thrust input makes bicycle model simpler and removes input magnitude constraint unlike a movable mass. The proposed controller can hold optimal equilibrium points using both steering input and leaning input. The simulation results on linear control for circular motion are demonstrated to show the validity of the proposed approach.

**Keywords:** unmanned bicycle, bicycle robot, bicycle dynamics, linear quadratic optimal control

### 1. 서론

로봇에 대한 관심과 활용도의 증가와 더불어 무인이동로봇에 대한 연구가 활발히 진행되고 있다. 그 중에서도 특히 자전거와 같은 형태의 2륜 로봇은 좁은 길을 다닐 수 있고 기동성이 좋으며 효율적인 이동수단이기 때문에 매력적인 연구대상으로 급부상하고 있다. 무인자전거 개발에 있어서 가장 중요하면서도 기초적인 부분은 자전거의 수학적 모델링이다. 이에 대한 관심은 19세기 후반 현대적 자전거 형태를 갖추어 동시에 시작되었으나[1,2], 자전거 모델은 그 복잡성으로 인해 여전히 도전적인 과제로 남아있다.

자전거는 속도와 자세에 따라서 안정한 영역과 불안정한 영역이 교차되는 특징을 가지고 있다. 또한 자전거의 수학적 모델을 살펴보면 매우 큰 비선형성과 커플링 항을 가지고 있을 뿐만 아니라 논홀로노믹(nonholonomic) 구속조건과 자이로 효과에 의해 복잡성이 더해져 동역학적 해석에 많은 어려움을 가지고 있다[3-6]. 이로 인해 자전거제어를 위해 슬라이딩 모드 제어, 피드백 선형화제어, 적응제어, 백스테핑 제어 등의 비선형 제어기들이 다수 제안되었는데[7-12], 실제 모델에 근접한 비선형 모델은 연산의 복잡성으로 인해 사용하기 어려우며 대부분 간략화된 비선형모델을 사용하는 실정이다. 결국 기존의 비선형 제어기들은 자전거의 모든 동작점에서 균일한 제어성능을 갖지 못하며 일정 속도범위와 회전반경 안에서만 유효성능을 갖는 한계를 가지고 있다. 한편으로 자전거의 선형모델은 이미 오래 전부터 연구되어 왔고[2], 근래

에는 매우 잘 정립되어 있어서 굳이 어려운 비선형모델을 직접적으로 활용하지 않아도 좋은 제어성능을 보이고 있다[13]. 이에 따라 선형모델을 기반으로 한 제어알고리즘도 많이 연구되어 왔지만, 기존의 방법들은 직선운동에 해당하는 평형점에 한정되어 있기 때문에 선형제어기의 비선형모델에 대한 제어성능이 보장되는 영역은 직선운동의 근방에 한정되는 문제점을 가지고 있다[14-17]. 기존 논문들은 선형제어기법의 경우 직선운동으로부터 유도된 모델에 한정되었고, 비선형제어기법의 경우 간략화된 모델을 사용하여 제어할 수 있는 속도와 회전반경의 범위가 제한되었다.

곡선운동영역에서 사람이 자전거의 자세를 제어할 때에는 핸들의 각도조절 뿐만 아니라 몸을 좌우로 움직여서 기울기 입력을 가한다.

기존의 논문들은 이를 모사하고자 자전거에 무게중심을 움직이는 기구물을 장착하여 입력을 가하였다[18-23]. 또는 기울기 입력으로써 자이로 액츄에이터를 이용하였다[24]. 자이로 액츄에이터의 경우 가속력을 이용하여 기울기 입력을 가하기 때문에 초기자세에서 기울기각의 변화를 많이 주어 자세를 유지할 경우 자이로가 고속으로 회전운동을 유지해야 한다. 그리고 무게중심을 이동하여 기울기 입력을 주는 방법은 모델을 더욱 복잡하게 만드는 단점이 있다.

본 논문에서는 다양한 속도와 회전반경에 대한 평형점을 구하여 선형제어기를 구성할 수 있는 모델링 알고리즘을 제안한다. 일정속도로 직선운동을 하는 경우에는 평형점이 유일하지만 곡선운동의 경우에는 같은 속도와 같은 회전반경을 갖는 동작점이라 하더라도 다수의 평형점이 존재한다. 이에 대해 본 논문에서는 곡선운동시 존재하는 수많은 평형점들 가운데 기울기 입력을 최소로 하는 평형점을 찾아내어 선형모델을 구하는 방법을 제시하고 제어기 설계를 예시한다. 또한 기존의 기울기 입력 방식을 대신하여 프로펠러의 추진력으로 기울기 입력을 가하는 방법을 제안한다. 이 방법은 기존방법에 비해 모델이 단순하고 입력의 크기 제약조건을

\* 책임저자(Corresponding Author)

논문접수: 2011. 6. 16., 수정: 2011. 8. 12., 채택확정: 2011. 8. 23.  
양지혁, 이상용, 김석윤, 이영삼, 권오규: 인하대학교 전기공학부  
(zero1zuck@daum.net/imugi13@naver.com/silentwind.kim@daum.net/lys@inha.ac.kr/okkwon@inha.ac.kr)

※ 본 연구는 지식경제부 및 정보통신산업진흥원의 IT융합 고급인력 과정 지원사업의 연구결과로 수행되었음(NIPA-2011-C6150-1102-0001).

※ 본 논문은 인하대학교 지원에 의하여 연구되었음.

완화시키는 장점을 가지고 있다.

### II. 자전거 모델

본 논문에서 다루는 자전거 모델은 라그랑주 방정식 및 뉴턴역학 방법으로 자전거 비선형모델을 유도하여 상호 검증한 [25,26]의 결과를 대상으로 하였다. 모델의 주 구성 요소는 앞바퀴, 뒷바퀴, 앞차체 그리고 뒤차체의 4개 강체로 구성되고, 각 강체의 질량중심은 그림 1의  $Q, P, H, G$ 로 표현된다. 자전거의 상태변수는 표 1에 정리된 것과 같이 총 8개이다. 이때 자전거가 똑바로 서있는 자세는  $\theta = 0, \psi = \pi/2, \phi = \pi$ 의 각도로써 그림 1과 같다. 뒷바퀴 무게중심의 좌표 중에서  $z$ 의 경우는  $z = r_1 \cos(\psi)$ 로 대체되어 결국  $\psi$ 에 의해 결정되기 때문에 제어목적의 상태변수로는 사용되지 않는다. 여기서  $r_1$ 은 뒷바퀴의 반지름이다.

Basu-Mandal의 논문에서 유도한 자전거 모델의 라그랑주 방정식을 요약하면 다음과 같다[25]. 자전거 모델의 앞바퀴, 뒷바퀴, 앞차체 그리고 뒤차체 각각의 운동에너지와 위치에너지를 식으로 표현하고 차를 구함으로써 식 (1)의 라그랑지안(Lagrangian)을 구한다.

$$L = KE - PE, \tag{1}$$

이때,

$$\begin{aligned} KE &= \frac{1}{2} \omega_{rf}^T I_{cm,rf} \omega_{rf} + \frac{1}{2} m_{rf} v_G^T v_G + \frac{1}{2} \omega_{rw}^T I_{cm,rw} \omega_{rw} \\ &+ \frac{1}{2} m_{rw} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + \frac{1}{2} \omega_{ff}^T I_{cm,ff} \omega_{ff} + \frac{1}{2} m_{ff} v_H^T v_H \tag{2} \\ &+ \frac{1}{2} \omega_{fw}^T I_{cm,fw} \omega_{fw} + \frac{1}{2} m_{fw} v_Q^T v_Q, \\ PE &= m_{rf} g r_{G,z} + m_{rw} g z + m_{ff} g r_{H,z} + m_{fw} g r_{Q,z}. \tag{3} \end{aligned}$$

이고, 여기서  $\omega, I_{cm}, v, r$ 은 절대좌표를 기준으로한 각 강체의 질량중심의 각속도벡터, 관성텐서, 속도벡터, 좌표벡터로서 자전거 상태변수의 종속변수이다.  $m$ 은 각 강체의 질량,  $g$ 는 중력가속도이다. 그리고 아래첨자  $rf, rw, ff, fw$ 은 각각 뒤차체, 뒷바퀴, 앞차체, 앞바퀴를 가리키고, 아래첨자  $G, H, Q$ 는 질량중심을 의미한다. 식 (3)에서  $r_{G,z}, r_{H,z}, r_{Q,z}$ 은 각 좌표벡터의  $z$ 성분을 의미한다. 즉 지면에서 질량중심  $G, H, Q$ 까지의 수직 높이이다.

자전거의 바퀴가 지면에서 미끄러지지 않는다는 제약조건으로부터 5개의 제약조건식이 유도된다[25]. 그리고 핸들 토크입력과 기울기 토크입력을 고려하면 자전거 모델의 라그랑주 운동방정식은 식 (4)의 과정을 통해 구할 수 있다.

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i + \tau_i, \tag{4}$$

여기서

- $q_i$ : 일반화된 좌표,  $i = 1, \dots, n$
- $Q_i$ : 일반화 힘
- $\tau_i$ : 구속력 성분,  $\tau$ 행렬의  $i$ 번째 행
- $\tau: [\Psi]^T \lambda$
- $\Psi$ : 제약식 행렬
- $\lambda$ : 라그랑주 승수

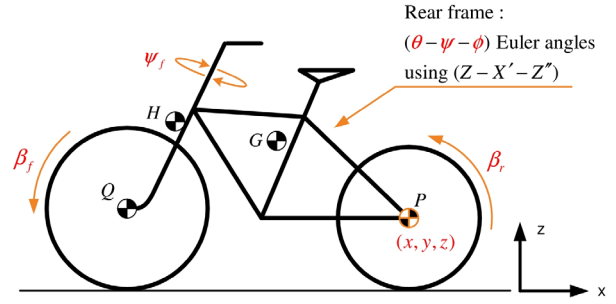


그림 1. 자전거 모델의 변수.  
Fig. 1. Dynamic variables of the bicycle model.

표 1. 자전거의 상태변수.  
Table 1. State variables of the bicycle model.

| 상태변수      | 의미                      |
|-----------|-------------------------|
| $x$       | 뒷바퀴 무게중심 $P$ 의 $x$ 좌표   |
| $y$       | 뒷바퀴 무게중심 $P$ 의 $y$ 좌표   |
| $\theta$  | 뒤차체의 헤딩각(yaw)           |
| $\psi$    | 뒤차체의 기울기각(roll)         |
| $\phi$    | 뒤차체의 Z-Y-Z 오일러각 중 마지막 각 |
| $\psi_f$  | 핸들 각도                   |
| $\beta_r$ | 뒷바퀴 각도                  |
| $\beta_f$ | 앞바퀴 각도                  |

이다. 이를 전개하는 과정은 매우 복잡하기 때문에 식 (4)는 수치해석도구인 Maple™로 풀고 검증하였으며, 연산결과 또 한 매우 길고 복잡하기 때문에 본 논문에서의 상세한 서술은 생략하였다.

### III. 최적자세 선형화 과정

자전거의 회전운동에 있어서 회전반경은 기울기와 핸들각에 의해 결정된다. 원하는 회전반경으로 돌기 위한 핸들각과 기울기각의 조합은 유일한 것이 아니라 무수히 많은 조합이 가능하다. 또한 핸들각과 기울기각의 조합에 따라 핸들 토크입력과 기울기 토크입력도 달라지기 때문에 보다 나은 조합의 평형점을 선택할 필요가 있다. 즉 최적자세라는 의미는 자전거의 회전운동으로 인한 원심력과 중력이 평형을 이루어 기울기 입력이 '0'에 가까운 평형점을 의미한다. 이 장에서는 기울기 입력을 최소로 하는 최적자세에서 평형점을 찾고 선형화하는 과정을 보인다.

알고리즘의 전체 흐름은 그림 2와 같다. 자전거의 회전운동에 있어서 회전반경이 동일해도 속도에 따라 최적 자세는 달라지기 때문에 가장 먼저 수행할 일은 원하는 회전반경과 진행속도를 기준으로 자전거의 적정 기울기 각도를 구하는 것이다. 우선 기울기 각도를 0으로 초기화 하고 주어진 회전반경, 속도, 기울기로부터 핸들각을 구한다. 그리고 해당 자세를 유지하기 위한 핸들입력과 기울기입력의 토크값을 구한다. 이때 초기값 0으로 설정된 기울기 각도로 인해 원심력을 보상할 만큼의 매우 큰 기울기입력 토크값이 계산된다. 이를 최소화 하는 것이 목적이며, 구현을 위해 그림 2의 첫 번째 분기문에서는 초기 기울기입력의 부호를 저장한다. 다음으로 기울기각을 점차 변화시키며 기울기입력의 부호가

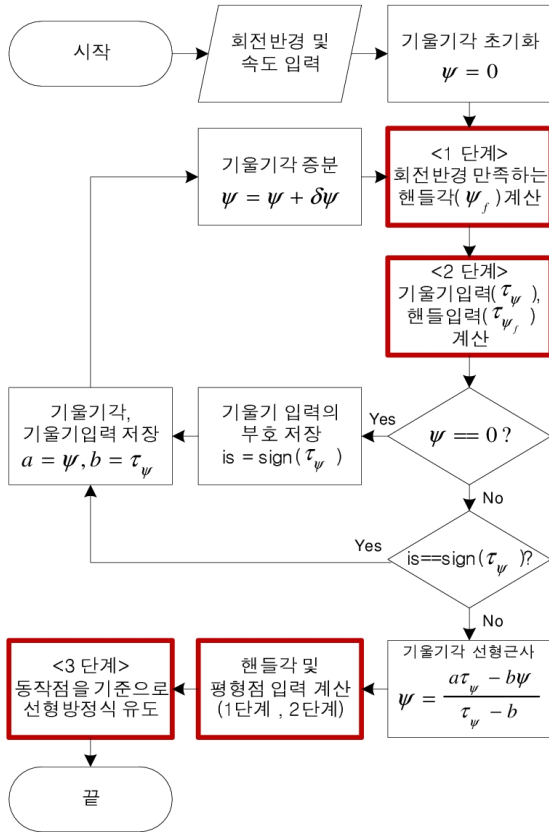


그림 2. 최적자세 계산 알고리즘 흐름도.  
Fig. 2. Flowchart for calculating optimal posture.

바뀌는 점을 찾는 것이 두 번째 조건 분기문의 역할이다. 이 과정을 거쳐 기울기입력을 최소화 하는 동작점을 찾아낼 수 있으며 해당 동작점에서의 선형모델을 얻음으로써 알고리즘이 마무리된다. 이 알고리즘에서 중요한 요소들은 그림 2의 1단계, 2단계, 3단계로 표현한 블록인데 이에 대한 세부사항은 다음의 각 절에서 설명한다.

1. 1단계: 주어진 회전반경을 만족하는 핸들각(ψ<sub>f</sub>) 계산

본 절에서는 주어진 회전반경(R), 자전거 기울기(ψ) 그리고 자전거 뒷바퀴 각속도(β<sub>r</sub>)가 주어졌을 때 평형상태를 만족하는 자전거의 핸들각 및 제어상태변수들의 초기치를 구하는 과정을 보인다. 핸들각 및 초기치들을 찾는 과정의 입력과 출력을 정리하면 다음과 같다.

입력: R, ψ, β<sub>r</sub>

출력: 모든 초기치(q<sub>ini</sub>, q̇<sub>ini</sub>)

$$q_{ini} = [x_0 \ y_0 \ \theta_0 \ \psi_0 \ \phi_0 \ \psi_{f_0} \ \beta_{r_0} \ \beta_{f_0}]^T$$

이 절에서 구하고자 하는 값은 주어진 회전반경과 속도에 대한 평형점이기 때문에 ψ̇<sub>0</sub> = 0, ψ̇<sub>f\_0</sub> = 0, ϕ̇<sub>0</sub> = 0 을 만족한다. 자전거의 동역학에 영향을 주지않는 초기치 x<sub>0</sub>, y<sub>0</sub>, θ<sub>0</sub>, β<sub>r\_0</sub>, β<sub>f\_0</sub> 는 모두 0이라고 가정한다. 그리고 자전거가 회전반경 R로 회전한다는 조건은 식 (5)와 같다.

$$\dot{\theta} = \frac{\sqrt{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}}{R} \tag{5}$$

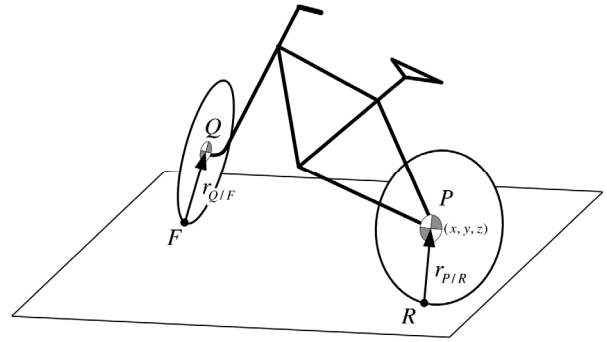


그림 3. 자전거의 제약조건.  
Fig. 3. Constraint conditions.

주어진 회전반경을 만족하는 핸들각 및 자전거 초기치는 다음과 같은 제약조건으로부터 구할 수 있다[25].

$$v_P = \omega_{rw} \times r_{P/R} \tag{6}$$

$$v_Q = \omega_{fw} \times r_{Q/F} \tag{7}$$

여기서 v<sub>P</sub>, v<sub>Q</sub>는 각각 뒷바퀴 무게중심의 속도와 앞바퀴 무게중심의 속도이고, ω<sub>rw</sub>, ω<sub>fw</sub> 는 각각 뒷바퀴와 앞바퀴의 각속도이다. 그리고 r<sub>P/R</sub>은 그림 3에서 보듯이 뒷바퀴와 지면의 접점 R에서 무게중심 P로 향하는 방향벡터이고 r<sub>Q/F</sub>는 앞바퀴와 지면의 접점 F에서 Q로 향하는 방향벡터이다. 식 (6), (7)의 의미는 P와 Q의 점속도가 바퀴의 회전에 의해서 결정된다는 것을 의미하는데 이는 바퀴가 바닥과 만나는 점에서 미끄러지지 않는다는 것과 동일하다.

식 (6)을 전개하여 자전거 모델의 변수로 나타내면 다음과 같다.

$$\dot{x} = -r_1(\cos\theta\dot{\beta}_r + \cos\theta\dot{\phi} - \sin\theta\sin\psi\dot{\psi} + \cos\theta\cos\psi\dot{\theta}), \tag{8}$$

$$\dot{y} = -r_1(\sin\theta\dot{\beta}_r + \sin\theta\dot{\phi} - \cos\theta\sin\psi\dot{\psi} + \sin\theta\cos\psi\dot{\theta}), \tag{9}$$

$$\dot{z} = r_1 \frac{\sin\psi\cos\psi\dot{\psi}}{\sqrt{1-\cos^2\psi}}. \tag{10}$$

여기서 r<sub>1</sub>은 자전거 뒷바퀴의 반지름이다. 식 (9), (10)에 초기조건 θ<sub>0</sub> = 0 과 평형조건 ψ̇<sub>0</sub> = 0, ϕ̇<sub>0</sub> = 0 을 대입하면 ẏ<sub>0</sub> = ż<sub>0</sub> = 0이 유도된다. 따라서 식 (5)에 ẏ<sub>0</sub> = 0 을 대입하면 θ̇<sub>0</sub> = ẋ<sub>0</sub>/R 이고, 이 결과를 식 (8)에 대입하면 ẋ<sub>0</sub>와 θ̇<sub>0</sub>를 구할 수 있다.

이제 남은 초기치는 ϕ<sub>0</sub>, ψ<sub>f\_0</sub>, β<sub>f\_0</sub>이다. 여기서 ϕ<sub>0</sub>은 Z-Y-Z 오일러 각 중 마지막 각으로 피치(pitch)와 관련된 각이다. 본 논문에서는 바퀴가 접촉되어있다고 가정하기 때문에 자전거의 핸들각과 기울기각에 의해서 ϕ<sub>0</sub> 값이 결정된다. 그런데 식 (7)을 전개하면 3개의 등식을 얻을 수 있지만 그 중 한 식은 항등식이기 때문에 ϕ를 미지수를 놓고 식을 전개하면 미지수는 3개인데 반해 독립방정식은 2개가 되어 해를 구할 수 없게 된다. 그러나 자전거가 수평한 지면위를 움직인다는 가정에 의해 ϕ = π로 대입할 수 있다. 이때 핸들각과 기울기각이 45도 안쪽이라면 ϕ<sub>0</sub>의 값의 오차는 π에서 1.5%안에 들어오므로 적절한 결과를 얻을 수 있다. 이와같이 자전거

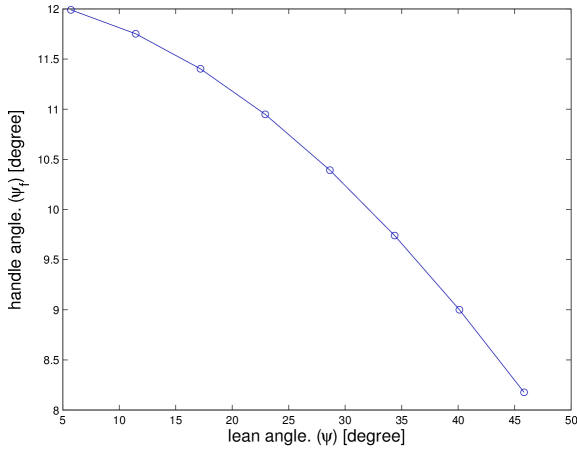


그림 4. R=5[m]일 경우 기울기각, 핸들각.  
Fig. 4. Lean and handle angle set when the turning radius is 5[m].

거의 파라미터를 대입하여 식 (7)을 전개하면 다음과 같은 식 (11), (12)를 얻을 수 있다. 자전거의 파라미터는 [25]에 있는 자전거 모델을 사용하였고, 회전반경은 5[m], 자전거 뒷바퀴 각속도는 20[rad/s]일 때의 결과이다.

$$0 = -5.79 - 0.407AB + 0.006\cos\psi_f + 0.0313\sin\psi_f + (0.905\sin^2\psi_f - 0.35AB^2 - 0.35A^2)A\dot{\beta}_f \quad (11)$$

$$0 = -1.15 + 0.035\cos\psi_f + 0.387B + 0.333B^2\dot{\beta}_f\sin\psi_f + (0.333A^2 + 0.905\sin^2\psi_f)\sin\psi_f \quad (12)$$

여기서,

$$A \equiv -0.841\cos\psi_f + 0.167\sin\psi_f$$

$$B \equiv -0.542\cos\psi_f + 0.26\sin\psi_f$$

식 (11)에서  $\dot{\beta}_f$ 를  $\psi_f$  관련 식으로 나타낸 후에,  $\dot{\beta}_f$ 를 식 (12)에 대입하면  $\psi_f$  관련 식으로 표현된다. 이를 풀기 위해 Maple™을 사용하였다. 이제  $\phi_0, \dot{\beta}_{f0}$ 는 초기치 [ $\psi_0, \psi_{f0}, \psi_0, \psi_{f0}, \dot{\beta}_{f0}$ ]로부터 구할 수 있다[25].

그림 4는 회전반경이 5[m]일 경우 이를 만족하는 기울기각과 핸들각의 관계이다. 결과가 보여주듯이 기울기각이 40도 변하는 동안 핸들각은 4도 이내로 변화하였다. 따라서 회전반경 결정을 위한 주요 요소가 핸들각임을 알 수 있으며, 기울기각에 따라서는 자전거 자세를 유지하기 위한 기울기 입력의 값이 결정된다.

2. 2단계: 자세유지를 위한 기울기입력 및 핸들입력 계산

1단계로부터 동작점  $q_{init}, \dot{q}_{init}$ 을 구하였다. 본 절에서는 이 동작점을 유지하기 위한 기울기입력 및 핸들입력을 계산하는 과정을 기술한다. 라그랑주 운동방정식 (4)를 전개하면 다음과 같이 표현할 수 있다.

$$[M(q)]\ddot{q} + C(q, \dot{q})\dot{q} + V(q) = Q + [\Psi]^T \lambda \quad (13)$$

식 (13)에서  $\ddot{q}$ 과  $\lambda$ 을 좌변으로 정리하고 나머지를 우변으로 넘기면 다음과 같다.

$$[M(q)]\ddot{q} - [\Psi]^T \lambda = -C(q, \dot{q})\dot{q} - V(q) + Q \quad (14)$$

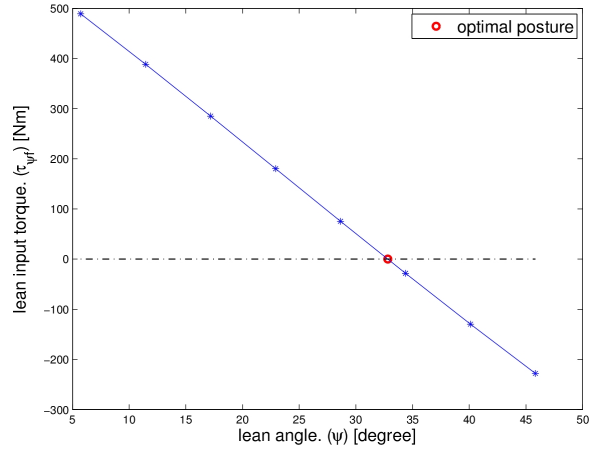


그림 5. 기울기각과 기울기입력의 관계.  
Fig. 5. Relation between lean angle and lean torque.

식 (14)는 다시 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$A(q)X = B(q, \dot{q}) + Q \quad (15)$$

여기서

$$A(q) = \begin{bmatrix} [M(q)] & [\Psi]^T \end{bmatrix}$$

$$X = \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix}$$

$$B(q, \dot{q}) = -C(q, \dot{q})\dot{q} - V(q)$$

식 (15)에서  $A(q)^{-1}$ 을 구하여 양변에 곱하면 비선형방정식을 구할 수 있다. 하지만 자전거의 비선형 방정식은 매우 복잡하기 때문에 동작점 ( $q_{init}, \dot{q}_{init}$ )을 대입하여  $A(q)$  행렬과  $B(q, \dot{q})$  벡터항을 상수행렬과 상수벡터로 만들어 준 후에야 그 동작점에서의  $\ddot{q}$ 을 구할 수 있다.  $Q$ 벡터는 자전거 입력 벡터로서 기울기각 ( $\psi$ ), 핸들각 ( $\psi_f$ ) 항에만 입력이 들어가게 된다. 식 (15)에 초기치를 대입하고 양변에  $A_{13 \times 13}$ 의 역행렬을 곱한 후 풀어서 나타내면 다음과 같다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\psi} \\ \ddot{\phi} \\ \ddot{\psi}_f \\ \ddot{\beta}_f \\ \ddot{\beta}_f \\ \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_5 \end{bmatrix} = A^{-1} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ b_4 + \tau_\psi \\ b_5 \\ b_6 + \tau_{\psi_f} \\ b_7 \\ b_8 \\ b_9 \\ \vdots \\ b_{13} \end{bmatrix} \quad (16)$$

식 (16)에서 중요한 항은  $\ddot{\psi}$ 와  $\ddot{\psi}_f$ 이다. 핸들 각가속도와 기울기 각가속도가 0이 되도록 하는 입력 토크  $\tau_\psi, \tau_{\psi_f}$ 를 찾으면 자전거의 자세를 유지할 수 있다. 즉 식 (16)을 전개해서 나타내면 식 (17)과 같은 연립방정식으로 나타내어지고, 이 식을 풀면 자전거 자세를 유지시키는 토크 입력 ( $\tau_\psi,$

$\tau_{\psi_f}$ ) 을 구할 수 있다.

$$\begin{cases} \ddot{\psi} = C_{11}\tau_{\psi} + C_{12}\tau_{\psi_f} + C_{13} = 0 \\ \ddot{\psi}_f = C_{21}\tau_{\psi} + C_{22}\tau_{\psi_f} + C_{23} = 0 \end{cases} \quad (17)$$

여기서  $C_{11}, C_{12}, \dots, C_{23}$  는 상수값이다.

그림 5는 회전반경이 5[m]이고 자전거 뒷바퀴 속도가 20[rad/s]일때 기울기각과 기울기 토크입력의 관계이다. 그림에서 보듯이 기울기각과 자전거 자세를 유지하기 위한 기울기입력의 관계는 거의 선형이다. 따라서 기울기각을 변화시키면서 기울기입력의 부호가 바뀌는 점으로부터 선형근사화하여 기울기입력이 0에 가깝도록 하는 기울기각을 구할 수 있다. 이 평형점은 다음과 같은 비용함수

$$J = \left| \tau_{\psi_f} \right| \quad (18)$$

를 최소로 하는 최적자세이다.

### 3. 3단계: 동작점을 기준으로 자전거 선형방정식 유도

자전거 파라미터 값을 대입하고, 1단계에서 구한 핸들과 동작점 그리고 2단계에서 구한 토크입력을 기준으로 비선형 방정식 (13)을 선형화 하면 다음과 같은 식으로 8개의 선형 방정식을 구할 수 있다.

$$\begin{aligned} &94\ddot{x} + 28.5\ddot{\theta} - 52.55\ddot{\phi} + 0.033\ddot{\psi}_f \\ &+ 75.63\dot{\theta} + 102.8\dot{\psi} - 40.97\dot{\phi} + 0.3735\dot{\psi}_f \\ &- 38.62\theta + 71.2\phi - 0.0447\psi_f - \lambda_1 - \lambda_3 = 0 \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} &94\ddot{y} - 32.5\ddot{\theta} - 44.2\ddot{\psi} + 17.6\ddot{\phi} - 0.16\ddot{\psi}_f \\ &+ 66.4\dot{\theta} - 122.4\dot{\psi} + 0.08\dot{\psi}_f + 44.03\theta + 59.83\psi \\ &- 23.85\phi + 0.22\psi_f - \lambda_2 - \lambda_4 + 636 = 0 \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} &28.5\ddot{x} - 32.5\ddot{y} + 28.8\ddot{\theta} + 16.3\ddot{\psi} - 30.7\ddot{\phi} + 0.28\ddot{\psi}_f \\ &- 0.065\ddot{\beta}_r - 0.162\ddot{\beta}_f, 35.9\dot{\psi} + 32.58\dot{\phi} - 0.76\dot{\psi}_f \\ &- 145.3\theta - 7.77\psi - 13.2\phi - 53.14\psi_f + 0.163\lambda_1 \\ &+ 0.17\lambda_3 + 1.06\lambda_4 - 219.75 = 0 \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} &-44.15\ddot{y} + 16.3\ddot{\theta} + 52.21\ddot{\psi} + 0.117\ddot{\psi}_f + 0.046\ddot{\beta}_r \\ &- 35.9\dot{\theta} + 78.44\dot{\psi} + 4.58\dot{\psi}_f + 0.117\dot{\beta}_r \\ &+ 0.26\dot{\beta}_f + 11.1\theta - 785.3\psi + 221\phi - 0.9\psi_f \\ &- 0.25\lambda_2 - 0.25\lambda_4 - 0.007\lambda_5 - 298.7 = \tau_{\psi} \end{aligned} \quad (22)$$

$$\begin{aligned} &-52.5\ddot{x} + 17.6\ddot{y} - 30.7\ddot{\theta} + 4.5\ddot{\psi} + 56.7\ddot{\phi} + 0.001\ddot{\psi}_f \\ &+ 0.12\ddot{\beta}_r + 0.28\ddot{\beta}_f - 32.6\dot{\theta} - 78.4\dot{\psi} - 0.96\dot{\psi}_f \\ &- 0.045\dot{\beta}_r + 205.3\theta + 23.1\psi - 484.2\phi - 0.3\lambda_1 \\ &- 0.3\lambda_3 - 0.57\lambda_4 + 0.89\lambda_5 + 119.1 = 0 \end{aligned} \quad (23)$$

$$\begin{aligned} &0.03\ddot{x} - 0.16\ddot{y} + 0.28\ddot{\theta} + 0.12\ddot{\psi} + 0.76\dot{\theta} - 4.58\dot{\psi} \\ &+ 0.96\dot{\phi} - 16\psi + 3.08\phi - 2.8\psi_f + 0.006\lambda_3 \\ &- 0.028\lambda_4 - 0.02\lambda_5 - 1.09 = \tau_{\psi_f} \end{aligned} \quad (24)$$

$$-0.0065\ddot{\theta} + 0.12\ddot{\psi} + 0.12\ddot{\beta}_r - 0.117\dot{\psi} + 114.9\theta - 0.3\lambda_1 = 0 \quad (25)$$

$$\begin{aligned} &-0.16\ddot{\theta} + 0.046\ddot{\psi} + 0.28\ddot{\phi} + 0.28\ddot{\beta}_f - 0.26\dot{\psi} \\ &+ 0.045\dot{\phi} - 0.051\dot{\psi}_f + 76.6\theta + 10.9\psi + 3.12\phi \\ &+ 92\psi_f - 0.34\lambda_3 - 0.07\lambda_4 = 0 \end{aligned} \quad (26)$$

식 (6), (7)로부터 도출되는 5개의 비선형 제약조건식 또한 선형화하면 다음과 같다.

$$\dot{x} + 0.3\dot{\phi} + 0.3\dot{\beta}_r - 0.1625\dot{\theta} - 0.2936\psi = 0 \quad (27)$$

$$\dot{y} + 0.2521\dot{\psi} + 5.811\theta = 0 \quad (28)$$

$$\begin{aligned} &\dot{x} - 0.0058\dot{\psi}_f + 0.3039\dot{\phi} - 0.1698\dot{\theta} + 0.3428\dot{\beta}_f \\ &- 1.46\psi_f - 0.4491\psi - 0.6364\phi = 0 \end{aligned} \quad (29)$$

$$\begin{aligned} &\dot{y} + 0.2522\dot{\psi} + 0.0284\dot{\psi}_f + 0.5745\dot{\phi} - 1.0605\dot{\theta} \\ &+ 0.0704\dot{\beta}_f + 0.7572\psi + 6.9379\psi_f + 0.1962\phi \\ &+ 5.8108\theta = 0 \end{aligned} \quad (30)$$

$$0.0073\dot{\psi} + 0.0205\dot{\psi}_f - 0.8914\dot{\phi} = 0 \quad (31)$$

선형방정식 (19)-(26)와 제약조건식 (27)-(31)을 연립해서 풀면 곡선운동의 최종 선형운동 방정식은 다음과 같다.

$$\ddot{u} = -0.73\ddot{\psi} - 2.3\ddot{\psi}_f + 8.5\ddot{\psi} - 15.8\ddot{\psi}_f + 0.014\tau_{\psi} - 0.079\tau_{\psi_f} \quad (32)$$

$$\ddot{\psi}_f = 24.7\ddot{\psi} - 16.6\ddot{\psi}_f - 22.2\ddot{\psi} - 177\ddot{\psi}_f - 0.079\tau_{\psi} + 5.6\tau_{\psi_f} \quad (33)$$

## IV. LQ 제어기 설계

본 절에서는 제안한 방법으로 유도한 선형제어기와 기존의 선형제어기를 곡선운동에 적용 비교함으로써, 연구에서 제안하는 곡선운동 선형화 방법의 필요성을 보인다. 기저 기존의 선형제어기란 곡선운동에서도 직선으로부터 유도한 LQ 이득과 직선운동의 동작점을 사용하는 것을 의미한다[14-16].

상태변수를  $x = [\psi \ \psi_f \ \dot{\psi} \ \dot{\psi}_f]^T$  로 정의하고 입력을  $u = [\tau_{\psi} \ \tau_{\psi_f}]^T$  로 정의하면, 자전거의 상태방정식은 식 (32), (33)로부터 다음과 같이 쓸 수 있다.

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ A &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 8.5 & -15.8 & -0.73 & -2.3 \\ -22.2 & -177 & 24.7 & -16.6 \end{bmatrix} \\ B &= \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0.014 & -0.079 \\ -0.079 & 5.6 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (34)$$

사람이 자전거를 탈 경우 자연스럽게 힘이 적게 드는 핸들 각과 기울기각을 유지하며 회전을 하고, 기울기입력은 몸의 무게중심을 이동하여 준다. 하지만 본 연구에서는 자전거의 무게중심을 이동하여 기울기입력을 주는 방법이 아닌 롤 방향으로 작용하는 프로펠러를 설치하여 기울기입력을 인가하는 방법을 사용한다. 프로펠러를 이용하여 기울기입력을 인가하는 방법은 모델을 단순화시키기 때문이다. 따라서 식 (34)의 상태방정식을 바탕으로 핸들입력과 기울기입력을 모두 사용하여 LQ 제어를 할 수 있다. 먼저 LQ 레귤레이터의 가격함수  $J$ 를 다음과 같이 정의한다.

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt. \quad (35)$$

그러면 최적제어 법칙에 의해서 입력  $u$ 는 다음과 같다.

표 2. 최근 학술지 논문의 연구결과.

Table 2. Recent results of journal article.

|       | [27]                         | [28]                         | [29]                         | [9]                          |
|-------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|------------------------------|
| 동작 범위 | 직선운동<br>근방<br>기울기각<br>15도 이하 | 직선운동<br>근방<br>기울기각<br>15도 이하 | 직선운동<br>근방<br>기울기각<br>10도 이하 | 직선운동<br>근방<br>기울기각<br>10도 이하 |
| 제어기   | Output-zeroing<br>control    | Cascade<br>control           | Sliding-mode<br>control      | Sliding-mode<br>control      |
| 사용 모델 | 간략화한<br>비선형모델                | 직선운동<br>선형모델                 | (시스템 식별)<br>선형모델             | 간략화한<br>비선형모델                |

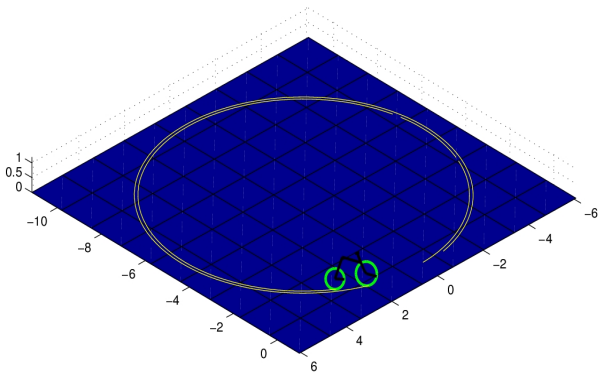


그림 6. 회전반경이 5[m]일 경우 시뮬레이션 결과.

Fig. 6. Simulation results with 5[m] turning radius.

$$u = -Kx, \tag{36}$$

여기서 제어게인행렬  $K$ 는

$$K = R^{-1}R^T P, \tag{37}$$

그리고  $P$ 는 다음과 같은 Riccati 식의 유일한 해이다.

$$A^T P + PA - PBR^{-1}B^T P + Q = 0. \tag{38}$$

본 논문에서는 Matlab/Simulink이용하여 자전거 비선형 모델을 만들고 곡선운동에서 LQ 제어를 적용하였다. 그림 6은 회전반경을 5[m]로 하여 LQ 제어를 적용한 시뮬레이션 결과이다. 그림에서 보듯이 자전거가 자세를 유지하며 원운동을 하는 것을 볼 수 있다. 기존 LQ 제어기의 경우 직선운동에서 선형화한 모델로부터 유도하였기 때문에 원운동을 하기 위해서는 외부제어 루프를 설계하고 경로추종(path tracking) 제어를 해야한다. 하지만 직선운동의 동작점에서 멀어짐에 따라 제어성능이 떨어지고, 안정적인 원운동을 하기 위한 기울기 최적자세는 반영되지 않는다.

표 2는 최근 학술지에 게재된 자전거 논문의 결과를 비교한 것이다. 기존 논문의 특징은 모두 직선운동을 기준으로 간략화한 비선형모델을 사용하거나 선형모델을 유도하여 적용했다는 것이다. 기울기각을 기준으로 동작범위를 비교해보면 모두 15도 이하인 것을 볼 수 있다. 그런데 고속에서 안정적인 회전운동을 하기 위해서는 기울기각이 커져야 하기 때문에 회전운동의 경우 기존의 결과들은 속도와 회전반경의 범위가 제한된다는 것을 알 수 있다. 본 논문에서 제안한 모델로부터 설계한 선형제어도 동작범위가 선형화한 동작점 부근으로 국한되지만, 더 다양한 속도와 회전반경에서 평

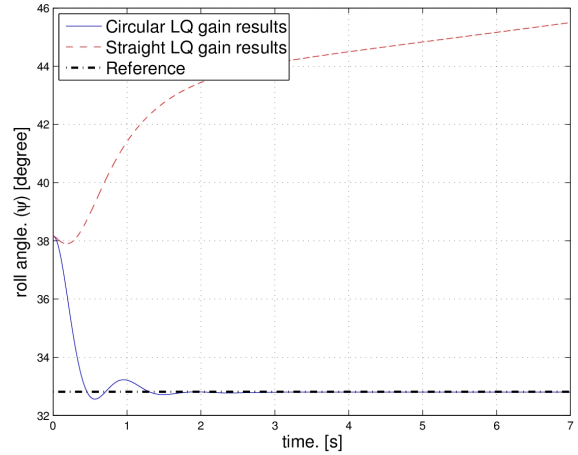


그림 7. 초기치가 동작점에서 5도 틀어졌을 경우 기울기각 결과.

Fig. 7. Lean angle response.

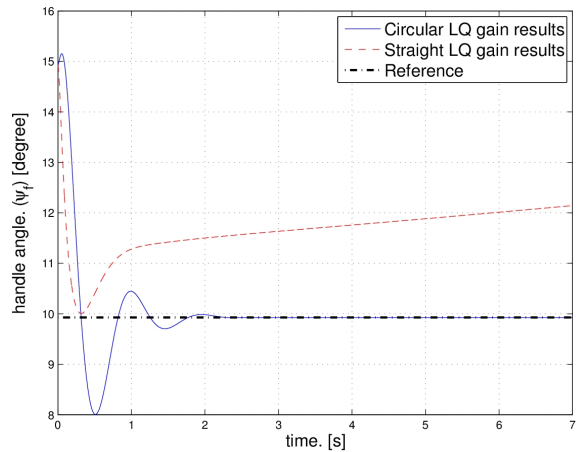


그림 8. 초기치가 동작점에서 5도 틀어졌을 경우 핸들각 결과.

Fig. 8. Handle angle response.

형점을 구하고 선형제어를 설계할 수 있기 때문에 제어기 교체 알고리즘을 적용하여 보다 역동적인 제어가 가능하다.

그림 7과 그림 8은 초기 핸들각과 기울기각이 동작점에서 5도 틀어졌을 때, 본 논문에서 제안한 곡선운동 LQ 제어기 결과와 기존 LQ 제어기 결과를 비교한 그림이다. 그림에서 볼 수 있듯이 곡선운동 LQ 제어기는 동작점으로 수렴하는데 2초가량 소요되지만, 기존 LQ 제어기는 수렴하지 못하고 오프셋이 생기는 것을 볼 수 있다. 본 논문에서 제안한 방법으로 유도한 상태방정식 식 (34)의 극점은  $[-7.6052+12.4376i, -7.6052-12.4376i, 2.0702, -4.2358]$ 이지만, 기존 선형모델은 극점이  $[1.7067 + 2.3158i, 1.7067 - 2.3158i, -2.6337, -10.3510]$ 으로 많은 차이가 난다. 따라서 자전거 곡선운동에 선형제어를 적용하기 위해서는 동작점마다 선형화하여 선형제어를 적용해야 한다는 것을 알 수 있다.

### V. 결론 및 향후과제

본 논문에서는 주어진 속도와 회전반경으로 수렴하는 무인자전거에 대한 LQ 제어를 설계하였다. 곡선운동에서 LQ 제어를 설계하기 위하여 주어진 회전반경을 만족하는

동작점을 구하고 비선형모델로부터 선형화하였다. 또한 기율 기입력을 최소로 하는 최적자세 알고리즘을 제안하였다. 본 논문에서는 기율기입력을 프로펠러로 주는 방법을 제안함으로써 기율기입력과 핸들입력을 같이 사용하여 제어하였다. MATLAB/SIMULINK 환경에서 자전거 비선형모델을 구성하고 곡선운동에서 선형제어기를 적용하여 성능을 확인하였다.

기존 논문들은 선형제어기법의 경우 직선운동으로부터 유도된 모델에 한정되었고, 비선형제어기법의 경우 연산량의 한계에 부딪쳐 간략화된 모델을 사용함으로써 제어할 수 있는 속도와 회전반경의 범위가 제한되었다. 그러나 본 논문에서 제안하는 방법을 활용함으로써 자전거운동의 다양한 회전반경과 속도에 대응하는 선형제어기를 구성할 수 있다. 본 연구의 향후과제에서는 입력의 제약조건과 모델의 복잡성을 감안하여 기율기 입력방식에 프로펠러를 활용할 계획이며, 본 논문에서 제안한 것 외에도 다양한 선형제어기를 여러 동작점에 대해 설계하고 무충돌전환(bumpless transfer) 알고리즘을 적용하여 다양한 회전반경을 포함하는 경로를 보다 역동적으로 운행할 수 있는 시스템을 구성하는 것이 목표이다.

#### 참고문헌

- [1] W. J. M. Rankine, "On the dynamical principles of the motion of velocipedes," *The Engineer*, vol. 28, pp. 79, 129, 153, 175, 1869.
- [2] F. J. W. Whipple, "The stability of the motion of a bicycle," *The Quarterly Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 30, no. 120, pp. 312-348, June 1899.
- [3] R. E. Klein, "Using bicycles to teach system dynamics," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 9, no. 3, pp. 4-9, Apr. 1989.
- [4] V. Cerone, D. Andreo, M. Larsson, and D. Regruto, "Stabilization of a riderless bicycle," *IEEE Control Syst. Mag.*, vol. 30, no. 5, pp. 23-32, Sep. 2010.
- [5] L. Guo, Q. Liao, S. Wei, and Y. Huang, "A kind of bicycle robot dynamic modeling and nonlinear control," *Proc. IEEE ICLA Conf.*, pp. 1613-1617, June 2010.
- [6] Y. Huang, Q. Liao, S. Wei, and L. Guo, "Dynamic modeling and analysis of a front-wheel drive bicycle robot moving on a slope," *Proc. IEEE ICAL Conf.*, pp. 43-48, Aug. 2010.
- [7] K. Iuchi, H. Niki, and T. Murakami, "Attitude control of bicycle motion by steering angle and variable cog control," *Proc. 31st Annual Conference of IEEE Industrial Electronics Society IECON*, pp. 2065-2070, Nov. 2005.
- [8] T. Yamaguchi, T. Shibata, and T. Murakami, "Self-sustaining approach of electric bicycle by acceleration control based backstepping," *Proc. 33rd Annual Conference of the IEEE Industrial Electronics Society*, pp. 2610-2614, Nov. 2007.
- [9] M. Defoort and T. Murakami, "Sliding-mode control scheme for an intelligent bicycle," *IEEE Trans. Ind. Electron.*, vol. 56, no. 9, pp. 3357-3368, Sep. 2009.
- [10] L. Keo and Y. Masaki, "Trajectory control for an autonomous bicycle with balancer," *Proc. IEEE/ASME International Conference on AIM 2008*, pp. 676-681, Jul. 2008.
- [11] H. D. Sharma and N. UmaShankar, "A fuzzy controller design for an autonomous bicycle system," *Proc. IEEE International Conference on Engineering of Intelligent Systems*, pp. 1-6, 2006.
- [12] N. Umashankar and H. D. Sharma, "Adaptive neuro - fuzzy controller for stabilizing autonomous bicycle," *Proc. IEEE International Conference on ROBIO*, pp. 1652-1657, Dec. 2006.
- [13] J. P. Meijaard, J. M. Papadopoulos, A. Ruina, and A. L. Schwab, "Linearized dynamics equations for the balance and steer of a bicycle: a benchmark and review," *Proc. of the Royal Society a*, vol. 463, no. 2084, pp. 1955-1982, 2007.
- [14] M. Nagai, "Analysis of rider and single-track-vehicle system- its application to computer controlled bicycles," *Automatica*, vol. 19, no. 6, pp. 737-740, Nov. 1983.
- [15] R. S. Sharp, "Optimal stabilization and path-following controls for a bicycle," *Proc. of the Institution of Mechanical Engineers*, vol. 221, no. 4, pp. 415-427, Jan. 2007.
- [16] R. Sharp, "On the stability and control of the bicycle," *Applied Mechanics Reviews*, vol. 61, no. 6, pp. 1-24, Nov. 2008.
- [17] D. Andreo, V. Cerone, D. Dzung, and D. Regruto, "Experimental results on l<sub>pv</sub> stabilization of a riderless bicycle," *Proc. ACC*, pp. 3124-3129, Jun. 2009.
- [18] C.-L. Hwang, H.-M. Wu, and C.-L. Shih, "Fuzzy sliding-mode under-actuated control for autonomous dynamic balance of an electrical bicycle," *Proc. IEEE International Conference on Fuzzy Systems*, pp. 251-257, Jun. 2008.
- [19] C. L. Hwang, H. M. Wu, and C. L. Shih, "Fuzzy sliding-mode underactuated control for autonomous dynamic balance of an electrical bicycle," *IEEE Trans. Control Syst. Technol.*, vol. 17, no. 3, pp. 658-670, May 2009.
- [20] M. Yamakita and A. Utano, "Automatic control of bicycles with a balancer," *Proc. International Conference on Advanced Intelligent Mechatronics*, pp. 1245-1250, Jul. 2005.
- [21] M. Yamakita, A. Utano, and K. Sekiguchi, "Experimental study of automatic control of bicycle with balancer," *Proc. IEEE/RSJ International Conference on Intelligent Robots and Systems*, pp. 5606-5611, Oct. 2006.
- [22] A. Okawa, L. Keo, and M. Yamakita, "Realization of acrobatic tum via wheelie for a bicycle with a balancer," *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation ICRA '09*, pp. 2965-2970, May 2009.
- [23] J. Yi, D. Song, A. Levandowski, and S. Jayasuriya, "Trajectory tracking and balance stabilization control of autonomous motorcycles," *Proc. IEEE International Conference on Robotics and Automation*, pp. 2583-2589, May 2006.
- [24] A. V. Beznos, A. M. Formal'sky, E. V. Gurfinkel, D. N. Jicharev, A. V. Lensky, K. V. Savitsky, and L. S. Tchesalin, "Control of autonomous motion of two-wheel bicycle with gyroscopic stabilisation," *Proc. IEEE ICRA*, vol. 3, pp. 2670-2675, May 1998.
- [25] P. Basu-Mandal, "Studies on the dynamics and stability of bicycles," Ph.D. dissertation, Indian Institute of Science, 2007.
- [26] P. Basu-Mandal, A. Chatterjee, and J. Papadopoulos, "Hands-free circular motions of a benchmark bicycle," in *Proc. the Royal Society A*, vol. 463, no. 2084, pp. 1983-2003, June 2007.
- [27] L. Keo and M. Yamakita, "Control of an autonomous electric bicycle with both steering and balancer controls," *Advanced Robotics*, 25, vol. 1, no. 2, pp. 1-22, Jan. 2011.
- [28] U. Nenner, R. Linker, and P. Gutman, "Robust feedback stabilization of an unmanned motorcycle," *Control Engineering Practice*, vol. 18, no. 8, pp. 970-978, May 2010.
- [29] T. Dao and C. Chen, "Sliding-mode control for the roll-angle tracking of an unmanned bicycle," *Vehicle System Dynamics*, vol. 49, no. 6, pp. 915-930, Feb. 2011.

**양 지 혁**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.

**김 석 윤**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제17권 제4호 참조.

**권 오 규**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제7호 참조.

**이 상 용**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제16권 제4호 참조.

**이 영 삼**

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지 제15권 제4호 참조.