


입·출력 제약을 가진 회전형 도립진자의 견실 스윙업 제어

Robust Swing-up Control of a Rotary Inverted Pendulum Subject to Input/Output Constraints

오 윤 성, 이 영 삼* 

(Yun-Seong Oh¹ and Young Sam Lee^{1,*})

¹Department of Electrical Engineering, Inha University

Abstract: This paper proposes a robust swing-up strategy that considers input/output constraints for a single rotary inverted pendulum. For the swing-up of a pendulum, we adopt a 2-DOF control structure that consists of a nonlinear feedforward controller and an optimal feedback controller. In order to maximize the performance of the actuator, we formulate the problem of generating feedforward trajectories as a nonlinear optimal control problem subject to constraints. The robustness cannot be guaranteed by only the feedforward control because of the backlash generated in the actuator. Therefore we implemented an optimal feedback controller using an extended Kalman filter as the observer for the controller's robustness. Through an experiment, we show that the proposed method has robustness against disturbance and swing a pendulum upward effectively satisfying input/output constraints.

Keywords: rotary inverted pendulum, swing-up control, 2-DOF control structure, input and output constraints, Kalman filter

I. 서론


오래전부터 제어이론을 검증하고 유용성을 판단하기 위한 도구로 도립진자 시스템이 사용되어 왔다[13]. 도립진자 시스템은 비선형성과 불안정성 같은 흥미로운 이론적 속성을 가질 뿐만 아니라 구동기의 개수보다 제어의 대상 변수가 더 많은 부족 구동 시스템(under-actuated system)이다. 도립진자 시스템의 제어를 다루는 연구는 대표적으로 도립 상태에서의 균형을 유지하는 균형 제어와 진자를 아래에서 위로 들어 올리는 스윙업 제어가 있다[1]. 그 중 스윙업 제어는 도립진자 시스템의 비선형성과 불안정성 및 시스템이 가지는 입·출력 제약들을 고려하여 제어를 설계해야 하기 때문에 제어기 설계 난이도가 더 높다고 볼 수 있다. 이런 이유로 도립진자 시스템의 제어는 균형제어 보다는 스윙업 제어에 초점이 맞춰져 있으며, 지금까지 다양한 스윙업 제어에 관한 연구들이 제안되어왔다[1-13]. 그 중 에너지 기반의 스윙업 제어는 효율적이고 강인한 스윙업 제어 방식이다[1-10]. 하지만 이 제어 방식은 시스템의 제약조건이 없다는 것을 기본 가정으로 하기 때문에 실제 시스템에 적용할 경우 문제가 발생할 수 있다. 예를 들어 직선형 도립진자를 스윙업하는 경우 카트(cart)가 무한한 길이의 레일(rail)위에서 운동한다고 가정하지만 실제 시스템의 레일 길이는 제약이 있다. 따라서 이를 고려하지 않으면 실제 실험에서 카트가 제한된 레일 길이를 벗어나게 되어 문제가 발생한다. 이러한 단점을 개선하기 위해 직선형 도립진자에 대해 레일 길이의 제약을 고려한 제어방식들이 활발히 연

구되었다[8-10]. 또한 에너지 제어 방식은 레일 길이의 제약 조건 뿐만 아니라 구동기의 가속도 및 속도와 같은 입력 제약조건 또한 체계적으로 고려할 수 없기 때문에 입력 제약 조건 내에서 제어가 가능하기 위해서는 시행착오적인 방법을 통한 제어기 계수 튜닝이 수반되어야 한다[2,4,6,8-10]. 이러한 문제를 해결하기 위해 [11]에서는 직선형 도립진자의 스윙업 궤적을 특정한 형태의 함수집합 내에서 찾아 사전에 계산해놓고 계산된 궤적을 견실하게 추종하도록 2 자유도 제어기 구조[14]를 사용하는 스윙업 방식을 제안하였다. 이를 발전시켜 [13]에서는 [11]과 같이 2 자유도 제어기 구조를 취하되, 스윙업 궤적을 특정한 함수로 보지 않고 이 점 경계치와 제약조건을 가지는 비선형 최적제어 문제의 해로 정의하여, 문제설정 단계에서 입·출력 제약조건을 적극적으로 고려할 수 있도록 하였다. [12]에서는 더욱 불안정하고 복잡한 시스템인 3단 직선형 도립진자의 스윙업 제어를 위해 [11]에 제시된 2자유도 제어방식을 동일하게 취하되, 피드백 제어기의 상태추정을 위한 방법으로 루엔버거 관측기대신 확장형 칼만 필터를 설계하여 더욱 견실한 제어방식을 제안하였다.

회전형 도립진자 시스템의 경우 신호선을 슬립링 구조에 연결할 수 있기 때문에 진자를 흔들어 올리는 arm이 무한히 회전할 수 있게 되어 회전변위 제약조건을 가지지 않는다. 그러나 슬립링 구조를 이용하지 않는 회전형 도립진자의 경우에는 arm이 회전할 수 있는 회전변위에 제약이 따르게 된다. 이를 고려하여 [8]에서는 arm의 회전변위 제약

*Corresponding Author

Manuscript received January 22, 2018; revised March 15, 2018; accepted March 22, 2018

오윤성, 이영삼: 인하대학교 전기공학과(yutt1237@naver.com; lys@inha.ac.kr, ORCID  0000-0003-0665-1464)

* 이 논문은 2017년도 정부(교육부)의 재원으로 한국연구재단의 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2017R1D1A1B03029578).

조건이 존재하는 시스템에 대해 에너지 기반의 제어방식에 arm의 회전변위 및 속도에 대한 가중치를 갖도록 리아푸노프 함수를 새롭게 정의하여, arm의 회전변위 및 속도 제약 조건을 만족시키면서 에너지 기반의 스윙업 제어를 수행하는 제어방식을 제안하였다. 하지만 이는 회전형 도립진자의 출력 제약 조건만을 고려한 제어 방식이며, 회전형 도립진자의 입·출력 제약조건을 체계적으로 고려하는 제어 방식에 대한 연구는 아직까지 이루어지지 않았다. 따라서 회전형 도립진자에 대해서도 입·출력 제약을 고려한 체계적이고 견실한 스윙업 제어기법 연구가 필요하다.

본 논문에서는 스윙업 제어를 위해 2 자유도 제어 구조를 취하고 피드포워드 궤적을 이점 경계치와 제약조건을 가지는 비선형 최적제어 문제의 해로 정의 하는 방식을 따른다. 또한 제어기의 견실성을 위해 피드백 제어기의 관측기로 확장 칼만 필터를 이용한다. 마지막으로 실제 실험을 통해 제안된 스윙업 제어기의 유용성과 견실성을 검증한다.

II. 회전형 도립진자 시스템의 모델방정식 및 제약조건

본 논문에서는 그림 1과 같은 회전형 도립진자 시스템의 견실 스윙업 제어를 다루기 위해 arm의 가속도를 제어입력으로 가지는 회전형 도립진자의 수학적 모델을 유도한다. 그림 2는 수학적 모델을 유도하기 위한 회전형 도립진자 시스템의 개념도이다. 여기서 m 은 진자의 질량, l 은 진자의 회전축에서 진자의 무게중심까지의 거리, r 은 arm의 회전축에서 진자의 회전축까지의 거리를 의미한다. 회전각 θ 는 arm의 회전변위이며, 시스템을 위에서 내려다보았을 때 정방향이 반시계 방향임을 의미한다. 회전각 α 는 진자의 회전변위이며, 진자가 수직으로 도립한 상태를 0으로 두고 이를 기준으로 정방향이 반시계 방향임을 의미한다. 직선형 도립진자의 경우 카트가 진자의 회전축과 수직인 방향으로만 움직이기 때문에 하나의 관성모멘트만 고려하면 된다. 그러나 회전형 도립진자의 경우 arm이 회전하면서 회전축의 방향이 계속해서 바뀌기 때문에 수학적 모델을 유도할 때 각 축의 관성모멘트를 모두 고려해야만 정확한 모델식을 얻을 수 있다. 그림 3은 이해를 돕기 위해 각각 x 축, y 축, z 축을 회전축으로 하여 회전시켰을 때 진자가 가지는 관성모멘트 I_x , I_y , I_z 를 그림을 통해 보여주고 있다. [4,8,15]에 제안된 회전형 도립진자의 모델식의 경우 각 축에 대한 관성모멘트의 고려가 이루어지지 않았다. 따라서 본 논문에서는 각 축의 관성 모멘트를 모두 고려한 모델 식을 새롭게 유도한다.

회전형 도립진자의 모델 방정식은 다음과 같은 Euler-Lagrange equations를 활용하여 얻어질 수 있다[16].

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial L}{\partial q} + \frac{\partial D}{\partial \dot{q}} = \tau. \tag{1}$$

여기서 q 는 일반화된 좌표, L 은 Lagrangian, D 는 감쇠운동 에너지, τ 는 일반화된 힘이다. 가속도를 제어 입력으로 사용하는 경우, arm의 가속도를 원하는 대로 발생시킬 수 있다고 가정하기 때문에 구동기와 arm과 관련된 미분방정식은 고려하지 않는다. 또한 감쇠운동에너지는 도립진자의 회



그림 1. 실험실에서 제작한 회전형 도립진자 시스템.
Fig. 1. Lab-built rotary inverted pendulum system.

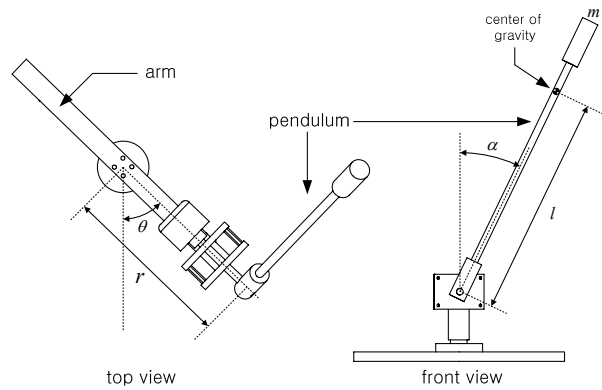


그림 2. 회전형 도립진자 시스템의 개념도.
Fig. 2. The conceptual diagram of a rotary inverted pendulum system.

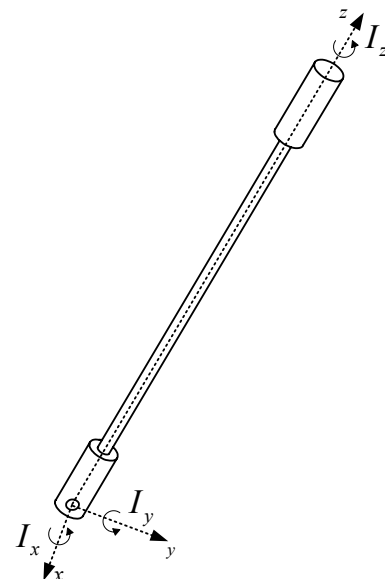


그림 3. 관성 모멘트의 의미.
Fig. 3. The meaning of inertia moment.

전축으로부터 발생하는 마찰력에 의한 것으로 매우 작기 때문에 무시하기로 한다. 운동에너지(K)와 위치에너지(P)의 차인 Lagrangian을 계산하기 위해 [17]의 회전 및 병진 변환에 관한 이론을 적용하면 모든 관성모멘트가 고려된 진자의 운동에너지를 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$K = \frac{1}{2}(mr^2\dot{\theta}^2 + ml^2\dot{\alpha}^2 + ml^2\sin^2\alpha\dot{\theta}^2 + 2mrl\cos\alpha\dot{\alpha}\dot{\theta} + I_x\dot{\alpha}^2 + I_y\sin^2\alpha\dot{\theta}^2 + I_z\cos^2\alpha\dot{\theta}^2). \quad (2)$$

진자의 위치에너지는 다음과 같이 표현된다.

$$P = mgl(\cos\alpha - 1). \quad (3)$$

본 논문에서 사용되는 도립 진자는 z 축 회전 대칭구조이기 때문에 $I_x = I_y = I_p$ 로 나타낼 수 있다. 새롭게 구해진 Lagrangian을 식 (1)을 거쳐 나타내면 다음과 같은 미분방정식으로 표현할 수 있다.

$$\bar{I}_p\ddot{\alpha} + mrl\cos\alpha\ddot{\theta} - (\bar{I}_p - I_z)\cos\alpha\sin\alpha\dot{\theta}^2 - mgl\sin\alpha = 0. \quad (4)$$

여기서 $\bar{I}_p = I_p + ml^2$ 이고, $g = 9.8m/s^2$ 는 중력가속도 상수이다. 상태변수를 $x_1 = \theta$, $x_2 = \alpha$, $x_3 = \dot{\theta}$, $x_4 = \dot{\alpha}$ 로 선정하면 회전형 도립진자 시스템은 다음과 같은 4차 비선형 상태방정식으로 표현된다.

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_4, \\ \dot{x}_3 &= u, \\ \dot{x}_4 &= \frac{1}{\bar{I}_p} \{ (\bar{I}_p - I_z) \cos x_2 \sin x_2 x_3^2 + mgl \sin x_2 - mrl \cos x_2 u \}. \end{aligned} \quad (5)$$

제작된 도립진자 시스템은 arm의 회전변위와 진자의 회전변위를 측정하기 위해 2개의 광학식 회전형 엔코더를 사용하며, 엔코더의 해상도는 5000 PPR(Pulse Per Revolution)이다. arm을 움직이기 위한 구동기로는 5:1 감속기어가 내장된 DC 모터를 사용한다. 또한 DC 모터의 동력을 증폭하여 arm에 전달하기 위해 3:1의 기어를 사용한다. 진자의 회전변위를 측정하는 엔코더의 신호선은 슬립링 장치에 연결되어 arm이 무한히 회전할 수 있는 구조를 지닌다. 측정 및 계산을 통해 구한 회전형 도립진자 시스템의 모델계수는 표 1과 같다.

표 1. 회전형 도립진자 시스템의 모델계수.

Table 1. Model parameters of the rotary inverted pendulum system.

Parameters	Values
m	0.127 Kg
r	0.164 m
l	0.1882 m
I_p	0.0005 Nms^2
I_z	$1.8601 \times 10^{-5} Nms^2$

구동기로 사용되는 DC모터의 성능제약으로 인해 arm은 회전속도 및 가속도 제약을 가진다. 본 논문에서 사용할 회전형 도립진자 시스템은 다음과 같은 제약을 가진다.

$$|\dot{\theta}| \leq 12 \text{ rad/s}, \quad |\ddot{\theta}| \leq 90 \text{ rad/s}^2. \quad (6)$$

arm은 무한히 회전할 수 있게 설계되었으므로 회전변위에 제약이 없다. 그러나 제안된 제어기법이 회전변위에 제약을 가지는 시스템에도 적용될 수 있는지를 확인하기 위해, 다음과 같은 가상의 회전변위 제약조건을 두었다.

$$|\theta| \leq 1 \text{ rad}. \quad (7)$$

θ 와 $\dot{\theta}$ 는 회전형 도립진자 시스템의 출력, $\ddot{\theta} = u$ 는 회전형 도립진자 시스템의 입력에 해당한다. 본 논문에서는 기술된 모델을 기반으로 회전형 도립진자 시스템의 입·출력 제약조건을 만족시키는 건실 스윙업 제어를 수행하고자 한다.

III. 스윙업 제어 전략

1. 2자유도 제어기 구조

2자유도 제어기 구조란 피드포워드 제어와 피드백 제어를 함께 사용하는 제어기 구조이다. 그림 4는 2자유도 스윙업 제어기의 구조를 나타내고 있다. 2자유도 제어기 구조에서 피드포워드 제어는 미리 계산된 가속도계적 u^* 를 도립진자에 인가하여 스윙업이 이루어지도록 하는 역할을 수행하고, 피드백 제어는 사전에 계산된 스윙업 궤적과 실제 스윙업 궤적사이에서 발생하는 오차를 보상하여 제어의 건실성을 높이는 역할을 수행한다.

본 논문에서는 스윙업 제어문제를 다루기 위해 2자유도 제어기 구조를 이용한다. 2자유도 제어기 구조내의 피드포워드 제어를 위한 제어 입력 궤적생성 방법으로 [13]에서 제안된 방법을 이용한다. 또한 피드백 제어기로 [11]에서 제안된 LQ 제어기를 이용하되, [12]에서 이용한 방법과 같이 피드백 제어를 위한 관측기로 확장형 칼만 필터를 설계하여 사용한다.

2. 피드포워드 궤적 생성

[11,12]에서 제안되는 스윙업 궤적 생성 방법은 스윙업을 위한 제어 입력 u 가 상수항과 cosine 함수의 조합으로 이루어진 특정한 형태의 함수라고 가정하고, 이점 경계치 조건을 만족하도록 상수항과 cosine 함수의 계수를 찾는 방법이다. 이 방법은 궤적자체가 특정한 형태를 가지는 것으로 가정하기 때문에 유연성이 떨어지며, 제약조건을 만족하는 궤적 자체를 얻을 수 없을 가능성이 있다. [13]에서는 이를

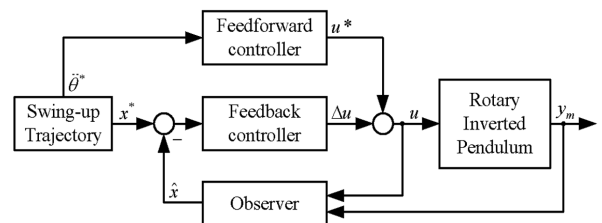


그림 4. 2자유도 스윙업 제어구조.

Fig. 4. 2-DOF swing-up control structure.

보완하여 제어입력 u 를 특정한 형태의 함수라고 가정하지 않고 주어진 제약조건을 만족하는 최적제어 문제의 해로 정의하였다. 이 방법은 이전의 방법보다 더 유연하고 조직적인 스윙업 제어가 가능하게 하며, 구동기의 성능을 최대한 끌어낼 수 있는 방법이다[13]. 따라서 본 논문에서는 회전형 도립진자의 구동기 성능을 최대한 활용하면서 스윙업 제어를 수행하기 위해, [13]에서 제안된 스윙업 궤적 생성 방법을 이용한다.

회전형 도립진자의 스윙업 제어 궤적 생성 문제를 경계조건과 제약조건이 존재하는 최적제어 문제로 설정하기로 한다. 회전형 도립진자가 arm을 흔들어 진자를 스윙업할 때, 다음과 같은 경계치 제약조건을 갖는다.

$$x_1(0) = 0, x_2(0) = -\pi, x_3(0) = 0, x_4(0) = 0, \quad (8)$$

$$x_1(T) = 0, x_2(T) = 0, x_3(T) = 0, x_4(T) = 0, \quad (9)$$

$$u(0) = 0, u(T) = 0. \quad (10)$$

여기서 T 는 스윙업에 소요되는 시간을 의미한다. 스윙업이 이루어지는 동안 실험에 사용될 회전형 도립진자가 만족해야 할 입·출력 제약조건은 (6), (7)에 나타나 있으며, 상태 변수와 입력 u 로 표현하면 다음과 같다.

$$|x_1| \leq 1 \text{ rad}, |x_3| \leq 12 \text{ rad/s}, |u| \leq 90 \text{ rad/s}^2 \quad (11)$$

따라서 회전형 도립진자의 스윙업 제어 궤적 생성 문제는 다음과 같은 최적제어 문제로 설정된다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} && J(x, u, T) \\ &\text{subject to} && \text{input/output constraint (10),} \\ & && \text{dynamic equations (5),} \\ & && \text{boundary conditions (8),(9),(10)} \end{aligned}$$

여기서 $J(x, u, T)$ 는 설계자의 의도가 반영된 비용함수이다. 설정된 최적제어 문제의 해는 GPOPS-II라는 수치해법을 사용하여 구해질 수 있다[18]. 본 논문에서는 구동기의 성능을 최대한 끌어내 소요된 시간을 최소로 하면서 진자를 세워 올리는 것을 목표로 한다. 스윙업에 소요된 시간을 최소로 만들기 위해 다음과 같은 비용함수를 사용 하였다.

$$J = \int_0^T 1 dt \quad (12)$$

비용함수 (12)를 이용하여 생성된 회전형 도립진자의 스윙업 궤적은 그림 5와 같다. 소요시간 T 를 최소로 하는 비용함수를 사용하였을 때 시간 T 는 0.944초가 구해졌다. 생성된 피드포워드 궤적은 모두 주어진 제약조건을 만족시키고 있다. 특히 arm의 회전변위와 가속도 입력의 경우 각 제약조건에 경계치에 궤적이 생성된 것을 볼 수 있다. 이는 생성된 궤적이 주어진 제약조건을 최대한 활용한다는 것을 의미한다.

3. 모델계수 추정

위에서 계산된 피드포워드 입력 궤적 u^* 은 표 1에 주어진 모델계수들을 이용하여 계산되었다. 진자를 빠르게 스윙업 하기 위한 피드포워드 제어 입력 궤적 u^* 는 높은 정확도를 필요로 한다. 표 1의 모델계수들은 측정 및 계산을 통해 합리적으로 구해진 값이지만, 이로부터 계산된 스윙업 궤적을 실제 스윙업 실험에 적용하면 실제 얻어진 궤적은 계산에 의해 얻어진 궤적과 크게 벗어날 가능성이 있다. 이는 arm의 가속도를 원하는 형태로 발생시키기 위해 사용하는 PI 제어기의 시간지연을 포함한 응답과 비선형 마찰 같은 모델링 되지 않은 효과들에 의한 것이다[11-13]. 피드백제어기가 계산된 궤적과 실제궤적의 차이를 보정해주지만, 본 논문에서 사용하는 피드백제어기는 궤적중심으로 선형화된

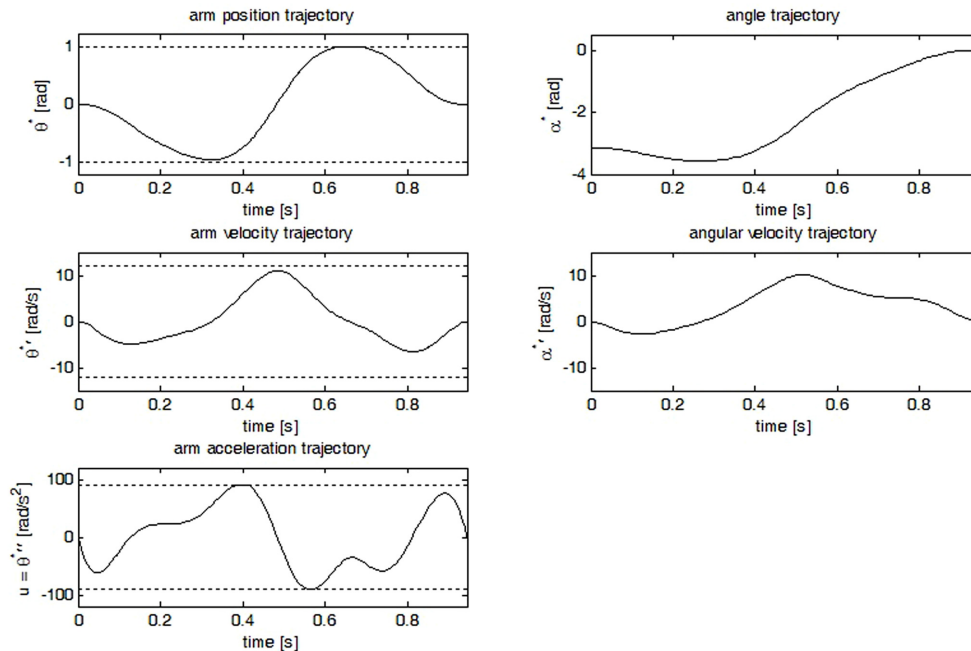


그림 5. 최소 시간 비용함수로 부터 얻어지는 회전형 도립진자의 스윙업 피드포워드 궤적.

Fig. 5. The feedforward trajectory for swing-up maneuver of the rotary inverted pendulum system for minimum-time cost functions.

표 2. 회전형 도립진자 시스템의 추정된 모델계수.

Table 2. Estimated model parameters of the rotary inverted pendulum system.

Parameters	Values
m	0.127 Kg
r	0.1564 m
l	0.1658 m
I_p	0.0022 Nms ²
I_z	1.8601×10^{-5} Nms ²

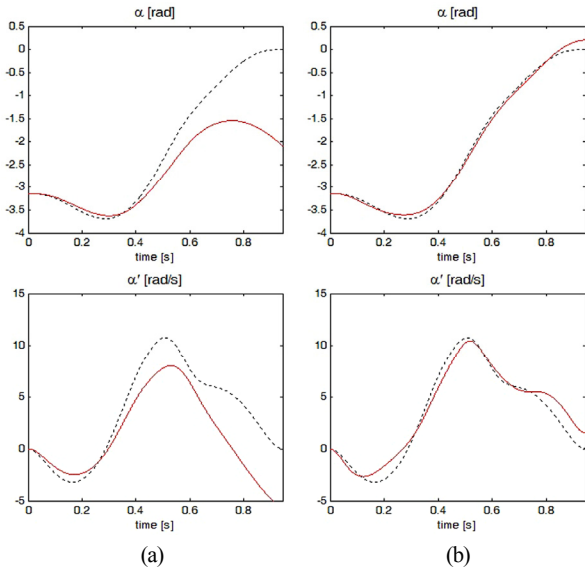


그림 6. 기존의 계수와 추정된 계수를 이용했을 때의 진자의 각과 각속도의 피드포워드 제어 실험 결과.

Fig. 6. The feedforward control experimental result of angle and angular velocity using (a) default parameters and (b) the estimated parameters : desired trajectories (dotted), actual trajectories (solid).

모델을 기반으로 하기 때문에, 실제궤적이 계산된 궤적과 매우 큰 차이를 보이는 경우 실제궤적은 보정 가능한 오차 범위를 벗어나게 된다. 따라서 피드포워드 제어 입력 궤적 u^* 의 정확도를 최대한 높이기 위해 [11-13]에서 제안된 계수 추정 방법을 사용하였다. 계수 추정은 다음의 과정을 통해 이루어진다. 먼저 계산된 피드포워드 제어 입력 궤적 u^* 를 실제 시스템에 인가하여 진자의 회전각 α 의 궤적을 얻는다. 이후 똑같은 제어 입력 궤적을 식 (5)에 인가하여 진자의 회전각 α 의 가상 궤적을 얻는다. 마지막으로 가상의 모델로부터 얻은 진자의 회전각 α 궤적과 실제 궤적을 비교하여 최대한 가상의 궤적과 실제 궤적이 일치하도록 모델 계수를 조정하는 최적화 과정을 거치면 추정된 모델계수를 얻을 수 있다. 표 2는 계수 추정을 통해 새롭게 얻은 모델 계수들이다. 그림 6은 표 1의 계수와 표 2의 계수들로 생성한 두 가지 궤적을 이용하여 얻은 피드포워드 제어 실험 결과이다. 그림 6(a)는 기존의 모델계수를 이용하여 계산된 입력 궤적을 피드포워드 입력으로 사용했을 때의 실제궤적과 계산된 궤적을 비교한 것이고, 그림 6(b)는 추정된

모델계수를 이용하여 계산된 입력 궤적을 피드포워드 입력으로 사용했을 때의 실제궤적과 계산된 궤적을 비교한 것이다. 점선은 계산을 통해 얻은 궤적을 나타내며, 실선은 실제 실험으로부터 얻어진 궤적을 나타낸다. (a)의 경우 $t=0.4$ 인 시점부터 점점 오차가 커지는 것을 볼 수 있으며 최종 시점에서의 결과가 계산된 결과와 크게 차이 나는 것을 볼 수 있다. (b)의 경우 실험 궤적과 계산된 궤적 사이의 정확성이 눈에 띄게 향상됨을 볼 수 있다. 그러나 여전히 미소한 오차가 존재하는 것을 볼 수 있으며 이는 계수 추정만으로 보정이 불가능한 외란임을 의미한다. 특히 구동기로 사용되는 DC모터의 backlash에 의한 외란은 기어의 초기 상태에 따라 다르기 때문에 피드포워드 제어의 불확실성을 높인다. 따라서 피드백제어기를 사용하여, 발생하는 미세한 오차를 보정하고 제어기의 건실성을 높이도록 하였다.

3. 피드백 제어기 설계

피드백 제어기는 스윙업 궤적을 추종할 때 발생하는 오차를 보정하여 제어기의 건실성을 높이는 역할을 한다. 본 논문에서는 [11-13]과 같이 LQ 제어기를 피드백 제어기로 사용한다. LQ제어기 설계를 위한 선형시스템은 비선형 시스템 (5)를 스윙업 궤적을 중심으로 선형화된 것을 사용한다. arm의 회전 변위에서 발생할 수 있는 정상상태 오차를 제거하기 위해 새로운 상태변수 $x_5 = \int_0^t \theta dr$ 를 도입해 선형 시스템의 차수를 5차로 확대하였다. 선형화된 비선형 시스템 (5)는 스윙업 궤적 주변에서 발생하는 작은 편차에 대해 다음과 같은 시변시스템으로 기술될 수 있다.

$$\dot{\Delta x} = A(t)\Delta x + b(t)\Delta u, \Delta x(0) = \Delta x_0 \quad (13)$$

$$A(t) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & A_1 & A_2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ A_3 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (14)$$

여기서 A_1, A_2, A_3 은 다음과 같다.

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{1}{I_p} \{ (\bar{I}_x - I_z)(\cos^2 x_2^*(t) - \sin^2 x_2^*(t))x_3^*(t)^2 \\ &\quad + mgl \cos x_2^*(t) + mrl \sin x_2^*(t) u^*(t) \} \\ A_2 &= \frac{2(\bar{I}_p - I_z)}{I_p} \cos x_2^*(t) \sin x_2^*(t) x_3^*(t) \\ A_3 &= -\frac{mrl}{I_p} \cos x_2^*(t) \end{aligned} \quad (15)$$

여기서 $u^*(t)$ 는 시간에 따른 피드포워드 입력을 의미하고, $x^*(t) = [x_1^*(t) \ x_2^*(t) \ x_3^*(t) \ x_4^*(t)]^T$ 는 피드포워드 입력 $u^*(t)$ 에 대한 회전형 도립진자의 스윙업 궤적을 의미한다. 최적제어 이론[19]에 따라 시변 Riccati equation을 계산하여 그림 7과 같은 시변 LQ 제어 이득 궤적을 얻었다.

4. 확장형 칼만 필터를 이용한 관측기 설계

실험에 사용될 회전형 도립진자 시스템은 2개의 엔코더로부터 arm의 회전변위 θ 및 진자의 회전변위 α 만을 측정 가능하기 때문에, arm의 회전속도 $\dot{\theta}$ 및 진자의 회전속도 $\dot{\alpha}$ 은

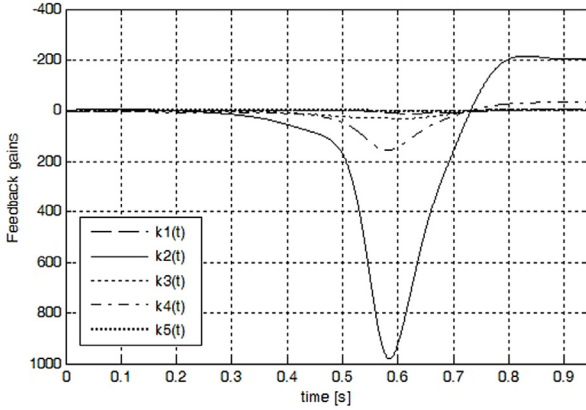


그림 7. 시변 LQ 제어 이득.

Fig. 7. Time-varying LQ control gain.

직접적인 측정이 불가능하다. 속도정보를 추정하기 위한 방법으로, 일반적인 경우 다음의 backward difference 공식을 이용한다.

$$\dot{x}(kT) \cong \frac{x(kT) - x((k-1)T)}{T} \quad (16)$$

여기서 x 는 위치정보 값, T 는 sampling time을 의미한다. 그러나 식 (16)으로부터 얻은 속도정보는 양자화 오차에 의한 잡음을 포함하므로 반드시 저역 통과 필터를 사용하여 잡음을 제거하여야 하며, 저역 통과 필터를 사용할 경우 신호 지연의 발생으로 인해 피드백제어가 제대로 이루어지지 않게 된다. 본 논문에서는 측정이 불가능한 속도정보를 시간 지연과 잡음 없이 정확하게 추정하기 위한 방법으로 확장형 칼만 필터를 이용한 관측기를 설계하였다. 확장형 칼만 필터 설계를 위해 Euler-method를 식 (5)에 적용하면 다음과 같은 이산형 모델을 얻을 수 있다.

$$x_{k+1} = \begin{bmatrix} x_{1,k} + T_a x_{3,k} \\ x_{2,k} + T_a x_{4,k} \\ x_{3,k} + T_a u_k \\ x_{4,k} + T_a \Omega_1 + T_a \Omega_2 u_k \end{bmatrix} \approx F(x_k, u_k). \quad (17)$$

여기서 T_a 는 sampling time을 의미하며, Ω_1 , Ω_2 는 다음과 같다.

$$\begin{aligned} \Omega_1 &= \frac{1}{I_p} \{ (\bar{I}_p - I_z) \cos x_{2,k} \sin x_{2,k} x_{3,k}^2 + mgl \sin x_{2,k} \}, \\ \Omega_2 &= -\frac{mrl}{I_p} \cos x_{2,k}. \end{aligned} \quad (18)$$

식 (17)에서 공정 잡음 w_k 와 측정 잡음 v_k 를 각각 고려하면, 다음과 같은 이산형 비선형 모델을 얻을 수 있다.

$$\begin{aligned} x_{k+1} &= F(x_k, u_k) + w_k \\ y_{m,k} &= C_m x_k + v_k. \end{aligned} \quad (19)$$

식 (17)을 기반으로 하여 확장형 칼만 필터 알고리즘[20]에 따라 관측기를 설계하였다.

설계된 관측기로부터 추정된 각속도 값과 식 (16)을 통해 얻은 각속도 값의 차이를 확인하기 위해 피드포워드 제

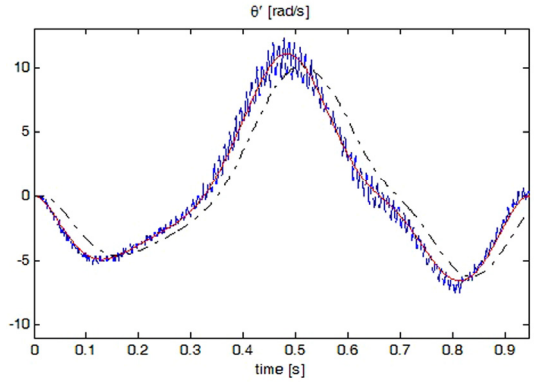
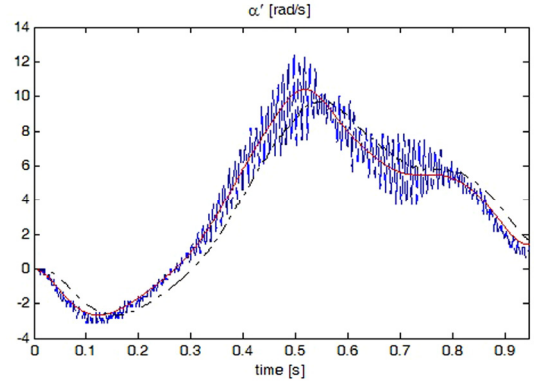


그림 8. 추정된 각속도 값의 비교: (16)으로부터 얻은 속도값 (파란색 점선), 저역 통과 필터를 거쳐 얻은 (16)의 속도값(검정색 dash-dot), EKF로부터 추정된 속도값(빨간색 실선).

Fig. 8. Comparison of estimated angular velocity values: velocity obtained from (16) (dotted), low pass filtered value of the velocity obtained from (16) (dash-dot), velocity value obtained from EKF (solid).

어만을 이용한 스윙업 실험을 진행하였다. 그림 8은 실험으로부터 얻은 속도 추정 값을 비교한 결과이다. 식 (16)으로부터 연산된 속도 값은 양자화 오차에 대한 영향으로 많은 잡음이 발생하는 것을 볼 수 있다. 연산된 속도 값에 저역 통과 필터를 사용하는 경우 잡음은 제거되지만 시간 지연이 발생하여 실시간 추정이 이루어지지 않는 것을 볼 수 있다. 반면 확장형 칼만 필터 기반의 관측기를 사용하는 경우 잡음과 시간지연이 모두 사라진 것을 볼 수 있으며, 저역 통과 필터를 거쳐 얻은 속도 값과 비교했을 때 추정된 속도 값이 실제 속도를 잘 반영하는 것을 확인할 수 있다.

IV. 스윙업 제어 실험 결과

본 논문에서 제안된 2자유도 제어기를 설계하여 스윙업 제어 실험을 수행하였다. 시스템의 입력이 되는 arm의 가속도는 정확한 생성이 불가능하므로 실제 실험에서는 arm의 가속도 입력을 한번 적분하여 얻은 속도계적을 PI 속도제어기의 reference로 사용하여 원하는 가속도 입력을 발생시키도록 하였다. 실시간 제어를 위한 방법으로서 연구실에서 자체 개발한 Rapid Control Prototyping 시스템[21]을 이용하

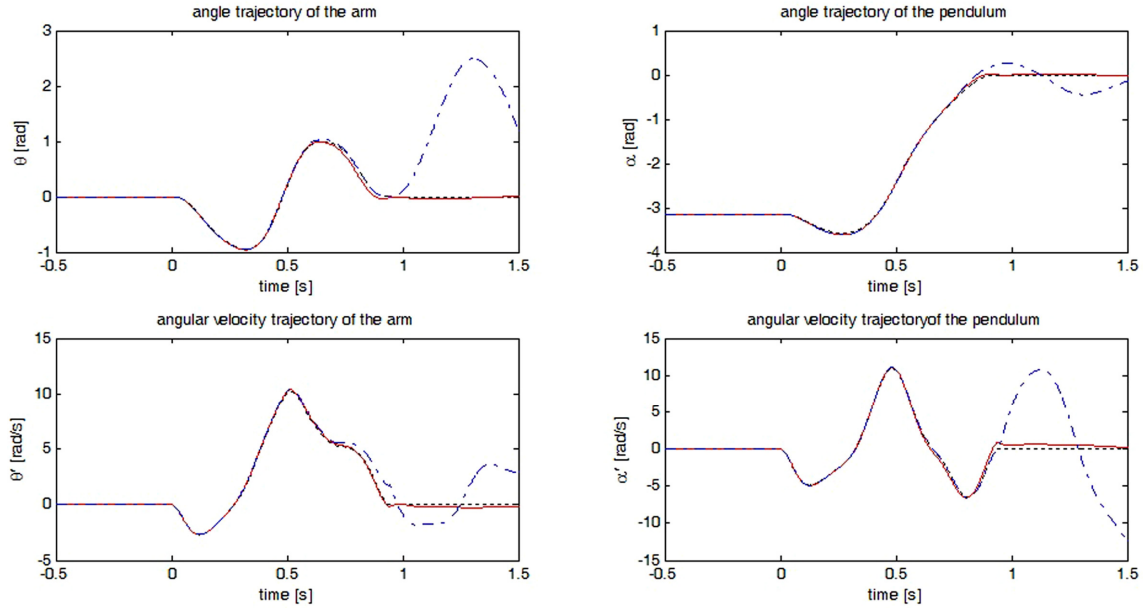


그림 9. 스윙업 소요 시간 $T = 0.994$ 인 실험결과의 비교: 피드포워드 제어 궤적(dash-dot), 제안된 2자유도 견실 제어 궤적(실선), 희망 궤적(점선).

Fig. 9. Comparison of the experimental results with swing-up maneuver time $T = 0.994$: feedforward control trajectory (dash-dot), proposed 2-DOF robust control trajectory (solid), desired trajectory (dotted).

였고, sampling time은 0.001초로 설정하였다. RCP 시스템은 Matlab/Simulink와 연동이 가능하기 때문에 빠른 제어기 설계가 가능하며, 피드포워드 궤적과 시변 이득을 PC에 저장하기 때문에 저장 공간의 문제로 기존의 시간 데이터 간격을 크게 조정 하지 않아도 된다는 장점이 있다.

그림 9는 설계된 제어기로 스윙업 제어를 수행한 결과이다. $t = 0.944$ 인 시점에서 스윙업 제어기는 LQ제어 기반의 균형 제어기[22,23]로 스위칭된다. 스윙업 구간에서 피드포워드 제어만을 사용하는 실험의 경우 실제 궤적이 계산된 궤적과 유사하게 나타나고 있으나 스위칭 이후에 arm이 크게 요동치는 것을 볼 수 있다. 이는 발생하는 오차로 인해 스위칭 시점의 상태변수가 경계조건 (9)에서 크게 벗어나기 때문이다. 피드포워드 제어기와 피드백 제어기를 함께 사용하는 2자유도 제어 실험의 경우 스위칭 이후에 arm이 크게 요동치지 않고 안정적으로 균형 제어가 이루어지는 것을 볼 수 있다.

V. 결론

본 논문에서는 회전형 도립진자의 입력과 출력 제약조건을 고려하여 도립진자를 스윙업 제어하는 방법을 제안하였다. 제안되는 방법은 기존의 입력과 출력 제약조건을 갖는 직선형 도립진자의 스윙업 제어기법을 기반으로 하여 회전형 도립진자에 적용시킨 결과이다. 기존의 방법에서 제안된 2자유도 제어기 구조에서 피드포워드 궤적 생성 방법으로 입·출력 제약조건을 고려한 최적제어 문제로부터 궤적을 계산해내는 방식을 이용하였고, 피드백제어를 위한 상태추정 방법으로 확장형 칼만 필터를 활용한 관측기를 설계하였다. 실제 실험을 통해 설계된 관측기가 측정이 불가능한 상태 변수를 효과적으로 추정하는 것을 확인하였으며, 제안

된 방식을 통해 회전형 도립진자 시스템이 입·출력 제약조건을 효과적으로 만족하며 구동부 모터를 최대한으로 활용하면서 backlash로부터 발생하는 불확실성에 강인한 스윙업 제어를 수행해 냄을 확인하였다.

REFERENCES

- [1] M. Widjaja and S. Yurkovich, "Intelligent control for swing up and balancing of an inverted pendulum system," Ms. thesis, Ohio State University, 1994.
- [2] K. J. Åström and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, vol. 36, pp. 287-295, 2000.
- [3] M. Wiklund, A. Kristenson, and K. J. Åström, "A new strategy for swinging up an inverted pendulum," *Preprint of IFAC 12th world congress*, vol. 9, pp. 151-154, 1993.
- [4] F. Gordillo, J. A. Acosta, and J. Aracil, "A new swing-up law for the Furuta pendulum," *International Journal of Control*, vol. 76, no. 8, pp. 836-844, 2003.
- [5] W. Zhong, and H. Rock, "Energy and passivity based control of the double inverted pendulum on a cart," *Proc. of the IEEE International Conference Applications(CCA)*, vol. 1, pp. 896-901, 2001.
- [6] N. Muškinja and B. Tovornik, "Swinging up and stabilization of real inverted pendulum," *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 53, no. 2, pp. 631-639, 2006.
- [7] X. Xin, "Analysis of the energy-based swing-up control for the double pendulum on a cart," *International Journal of Robust and Nonlinear Control*, vol. 21, pp. 387-403, 2010.
- [8] Y. S. Lee, J. J. Oh, S. Y. Shim, H. Lim, and J. H. Seo, "Swing-up control for a rotary inverted pendulum with re-

- stricted rotation range,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 20, pp. 835-841, 2014.
- [9] Y. Otani, T. Kurokami, A. Inoue, and Y. Hirashima, “A swingup control of an inverted pendulum with cart position control,” *Proc. of the IFAC Conference on New Technologies for Computer Control*, pp. 13-22, Hongkong, China, 2001.
- [10] J. H. Yang, S. Y. Shim, J. H. Seo, and Y. S. Lee, “Swing up control for an inverted pendulum with restricted cart rail length,” *International Journal of Control, Automation, and Systems*, vol. 70, no. 4, pp. 674-680, 2009.
- [11] K. Graichen, M. Treuer, and M. Zeitz, “Swing up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation,” *Automatica*, vol. 43, pp. 63-71, 2007.
- [12] T. Glück, A. Eder, and A. Kugi, “Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation,” *Automatica*, vol. 49, pp. 801-808, 2013.
- [13] T. Meta, G. Y. Gyeong, J. H. Park, and Y. S. Lee, “Swing-up control of an inverted pendulum subject to input/output constraints,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 20, pp. 835-841, 2014.
- [14] K. Graichen, V. Hagenmeyer, and M. Zeitz, “A new approach to inversion-based feedforward control design for nonlinear systems,” *Automatica*, vol. 41, pp. 2033-2041, 2005.
- [15] I. Fantoni and R. Lozano, “Stabilization of the furuta pendulum around its holonomic orbit,” *International Journal of Control*, vol. 75, no. 6, pp. 390-398, 2002.
- [16] T. R. Kane and D. A. Levinson, *Dynamics: Theory and Applications*, McGraw-Hill Book Company, 1985.
- [17] M. W. Spong, *Robot Modeling and Control*, Wiley, 2006.
- [18] M. A. Patterson and A. V. Rao, GPOPS - II Version 1.0:A General-purpose Matlab Toolbox for Solving Optimal Control Problems using Variable-order Gaussian Quadrature Collocation Methods, 2014.
- [19] D. E. Kirk, *Optimal Control Theory: An Introduction*, Prentice Hall, 1970.
- [20] B. D. Anderson and J. B. Moore, *Optimal filtering*, Englewood Cliffs, 1979.
- [21] Y. S. Lee, B. Jo, and S. Han, “A light-weight rapid control prototyping system based on open source hardware,” *IEEE Access*, vol. 5, pp. 11118-11130, 2017.
- [22] J. Y. Choi and Y. S. Lee, “The controller implementation of a balancing robot using a system model with acceleration as the input,” *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 24, pp. 17-25, 2018.
- [23] J. S. Choi and Y. S. Lee, “The implementation of a hardware-in-the-loop simulator for an inverted pendulum system using open-source hardware.” *Journal of Institute of Control,*

Robotics and Systems (in Korean), vol. 23, no. 2, pp. 117-125, 2017.



오 윤 성

2017년 인하대학교 전기공학과 졸업.
2017년~현재 인하대학교 대학원 전기공학과 석사과정 재학중. 관심분야는 선형 및 비선형 시스템 제어, 로봇 공학.

이 영 삼

제어 · 로봇 · 시스템학회 논문지, 제15권 제4호 참조.