

# 3단 도립진자의 구조 제안 및 LW-RCP02를 이용한 Swing-up Control의 구현

## Structural Proposition for a Triple Inverted Pendulum and Implementation of Swing-up Control Using an LW-RCP02

최창규<sup>1</sup>, 주도윤<sup>1</sup>, 정종익<sup>1</sup>, 이영삼<sup>1\*</sup>  
(Changkyu Choi<sup>1</sup>, Doyoon Ju<sup>1</sup>, Jongik Jeong<sup>1</sup>, and Young Sam Lee<sup>1\*</sup>)

<sup>1</sup>Embedded Control Lab. (ECL), Department of Electrical and Computer Engineering, Inha University

**Abstract:** In this paper, we propose a new structure for a triple inverted pendulum with easy construction properties. We also implement a swing-up control for the proposed triple inverted pendulum using a lab-built rapid control prototyping environment known as light-weight rapid control prototyping 02 (LW-RCP02). The swing-up control of a triple inverted pendulum has a two-degree-of-freedom structure and requires a very accurate mathematical model. The proposed triple inverted pendulum adopts the same method that was developed for a double inverted pendulum by the authors' laboratory to achieve excellent matching properties with the model. For free rotation of three pendulums, a hollow shaft revolute joint that can be used with a slip ring is newly proposed. Swing-up control of a triple inverted pendulum is implemented using Simulink and LW-RCP02. Moreover, a two-degree-of-freedom control structure combining feedforward and feedback is adopted for swing-up control of a triple inverted pendulum. We implement the parameter estimation method for the triple inverted pendulum and calculate the trajectory for feedforward control using estimated parameters and the direct transcription method. The uncertainty of feedforward control is compensated by adding a time-varying LQ feedback controller. As the sampling frequency of the implemented controller is 1KHz, real-time control is achievable using a standard PC.

**Keywords:** Triple inverted pendulum, 2-DOF control, LW-RCP, Model based control

### 1. 서론

도립진자 시스템은 불안정한 동특성, 비선형 모델 방정식, 그리고 비최소 위상의 특성이 공존하는 제어 난이도가 높은 시스템이다. 이러한 특성 때문에 제어공학의 효용성을 증명하는 곳에 사용되어 왔다. 교육에서는 되먹임 제어를 통해 시스템을 안정화하였을 경우 그 효용성을 학생들에게 명확히 전달할 수 있는 장점이 있으며, 연구에서는 새로운 제어 방법의 유용성을 증명하기 위해 이용되어 왔다[1-6]. 도립진자는 매우 다양한 형태가 존재하여 대표적으로는 직선형 도립진자[4-6], 회전형 도립진자[7], reaction wheel 도립진자[8] 등이 있다. 더불어 진자의 단수의 형태에 따라 1단, 2단 3단 도립진자의 형태가 존재한다. 특히 2단과 3단 형태의 도립진자 제어에 있어 가장 활발히 연구되는 분야는 swing-up 제어인데 다단 도립진자의 swing-up 제어는 제어의 난이도적 측면에서 가장 높은 난이도를 갖는다고 할 수 있다.

2단 도립진자의 swing-up에 대한 최초 연구는 [9]에서 찾

아볼 수 있다. 해당 연구에서는 2자유도 제어구조를 기반으로 swing-up 제어를 수행하며 제어기의 출력으로는 힘(force)을 사용하는 구조이다. Graichen도 2007년에 역시 2자유도 구조의 제어방식을 이용하여 2단 도립진자의 swing-up 제어에 성공하였다[10]. 이들의 방법은 [9]와 달리 2자유도 제어기의 출력으로 가속도를 사용하는 방식을 사용하고 있다. [10]의 방법에서는 2단 도립진자의 swing-up 궤적을 오프라인 최적화를 통해 구하고 이를 앞먹임(feedforward) 형태로 시스템에 인가하고 계산된 궤적과의 오차를 되먹임(feedback) 제어를 통해 보정하여 2단 도립진자의 swing-up 제어를 수행하는 방식을 취하고 있다. Graichen의 방법에 있어 가장 핵심적인 요소는 실제 시스템의 동특성을 정확히 반영하는 수학적 모델과 모델 parameter를 구함으로써 swing-up 궤적을 사전에 계산하고 이를 바탕으로 제어 문제를 완벽한 모델기반 제어의 형태로 가져왔다는 것이다. 3단 도립진자의 swing-up 제어의 경우 난도적인 측면에서 2단 도립진자의 swing-up 제어보다 더 어려우나 [11]에서는 Graichen의 방법

\*Corresponding Author

Manuscript received September 1, 2022; revised September 8, 2022; accepted September 13, 2022

최창규: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(chad1206@gmail.com, ORCID<sup>®</sup> 0000-0001-6857-9141)

주도윤: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(seiko.kr@gmail.com, ORCID<sup>®</sup> 0000-0001-7011-6779)

정종익: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 대학원생(wlm1235456@gmail.com, ORCID<sup>®</sup> 0000-0001-8708-3010)

이영삼: 인하대학교 전기컴퓨터공학과 교수(lys@inha.ac.kr, ORCID<sup>®</sup> 0000-0003-0665-1464)

※ 본 논문은 정부(과학기술정보통신부)의 재원으로 한국연구재단에서 지원을 받아 수행된 연구임(No. 2021R1F1A1061965).

을 이용하여 3단 도립진자의 swing-up 제어도 성공적으로 수행될 수 있음을 실험을 통해 보였다. 저자들이 속한 연구실은 오랜 기간 동안 다양한 도립진자를 구현하고 제어방법을 연구해왔다. 최근에는 수학적 모델과 정합성이 좋은 2단 도립진자의 구조를 제안하고 도립진자의 모델 parameter를 추정하는 방법에 대한 연구를 통해 성공적으로 2단 도립진자의 swing-up 제어를 수행하였다[12]. 저자들이 직접 2단 도립진자의 제어를 수행한 이유는 각 단의 회전부가 자유롭게 회전할 수 있는 구조를 가진 2단 도립진자 시스템을 구할 수가 없기 때문이었다. Quanser[13]와 같이 제어 시스템 교육용 플랫폼을 전문적으로 연구, 제작 판매하는 회사의 2단 도립진자의 경우 두 번째 진자의 회전각도 정보를 얻어오기 위한 결선부가 진자의 회전축에 장착된 encoder에 연결되어 있어 자유로운 회전이 불가능하고 이로 인해 선형 제어 영역에서의 제어만을 수행할 수 있다. 더욱이 Quanser에서는 3단 도립진자와 관련된 제품군이 존재하지 않는다. 저자들은 [12]의 연구를 통해서 2단 도립진자의 제작에 있어 중요한 요소 기술들을 확보하였고 이를 기반으로 3단 도립진자의 제작 가능성을 확인하였다. 이 논문에서는 3단 도립진자의 자유로운 회전에 있어 가장 핵심이 되는 중공축 revolute joint 구조를 제안한다. [12]에서와 같이 본 논문에서도 제작된 3단 도립진자의 제어를 위해 연구실에서 개발한 LW-RCP02와 Simulink를 이용하여 상위 수준의 사고를 기반으로 제어 문제 자체에 집중할 수 있는 접근법을 택한다.

본 논문은 다음과 같은 구성을 갖는다. 2절에서는 제안하는 3단 도립진자의 구조와 수학적 모델에 대해서 다룬다. 3절에서는 제작된 3단 도립진자를 LW-RCP [14]를 이용하여 swing-up 제어하는 방법을 구현한다. 이를 위해 parameter estimation 방법과 feedforward 궤적의 계산, 시변 LQ 제어기의 이득을 계산하는 방법 등을 사용한다. 끝으로 4절에서는 논문의 결론을 다루도록 한다.

## II. 3단 도립진자의 구조 제안

2단 도립진자의 swing-up control을 다루는 [10]과 3단 도립진자의 swing-up control을 다루는 [11]에서의 제어기 구조는 [10]에서 제안된 2자유도 구조의 제어방식으로 동일하다. 또한 수학적 모델과 정합특성이 매우 높은 모델 parameter를 찾아 feedforward 궤적을 계산하는 것을 전제로 하고 있다. 본 논문에서 제안하는 3단 도립진자의 swing-up을 위한 제어구조는 [10]의 방식과 동일한 방식을 사용한다. 하지만 3단 도립진자의 내부구조는 두 논문에서 공개된 바가 없으므로 본 논문에서 다루는 구조의 제안은 독자성을 가진다고 할 수 있다. 제안되는 도립진자의 기구적 구조를 다루기 전에 먼저 3단 도립진자의 개념도와 수학적 모델방정식을 정리하기로 한다.

### 1. 3단 진자의 수학적 모델

그림 1은 3단 도립진자의 기구적 개념도를 보여주고 있다. 사용된 변수들의 의미는 다음과 같다.  $M$ 은 cart의 질량,

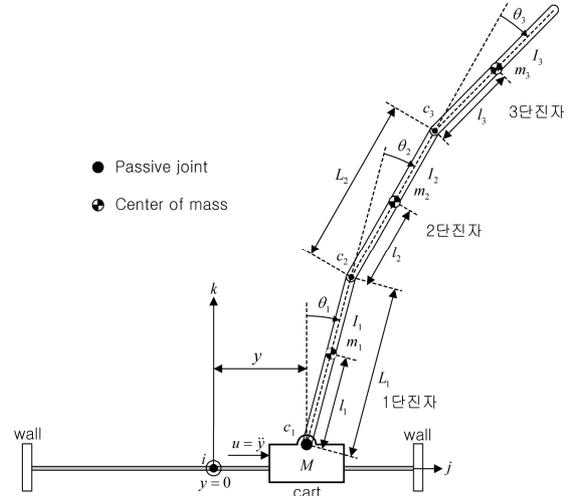


그림 1. 3단 도립진자의 개념도.

Fig. 1. The conceptual diagram of a triple inverted pendulum.

$m_1, m_2, m_3$ 는 각 진자들의 질량,  $l_1, l_2, l_3$ 는 각 진자들의 회전축으로부터 무게중심까지의 길이,  $L_1$ 은 1단 진자의 회전축과 2단 진자의 회전축까지의 길이를 나타낸다.  $L_2$ 는 2단 진자의 회전축과 3단 진자의 회전축까지의 길이를 나타낸다.  $u$ 는 cart의 가속도,  $y$ 는 cart의 초기위치로부터의 변위,  $\theta_1$ 은 1단 진자의 회전변위로서 지면에 대한 법선과 이루는 각이며,  $\theta_2$ 는 2단 진자가 1단 진자와 이루는 상대적인 회전변위,  $\theta_3$ 는 3단 진자와 2단 진자가 이루는 상대적인 변위를 나타낸다.  $c_1, c_2, c_3$ 는 각 진자의 회전축에서 발생하는 마찰계수를 나타내며  $I_1, I_2, I_3$ 는 각 진자의 회전관성이다. 논문에서는 SI 단위계를 사용하는 것으로 가정한다. 그리고  $i, j, k$ 는 rail의 중심점을 원점으로 한 직각좌표계의 좌표 축을 각각 나타낸다. 3단 도립진자의 수학적 모델은 Euler-Lagrange equation을 이용하여 유도하면 다음과 같이 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \ddot{y} + \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ \star & m_{22} & m_{23} \\ \star & \star & m_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} = 0 \quad (1)$$

여기서  $\star$ 는 대칭행렬의 대칭부 요소를 나타낸다.  $n_i, m_{ij}, r_i$ 의 의미는 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} n_1 &= h_6 \cos(\theta_1) + h_7 \cos(\theta_1 + \theta_2) + h_8 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ n_2 &= h_7 \cos(\theta_1 + \theta_2) + h_8 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \\ n_3 &= h_8 \cos(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} m_{11} &= h_1 + h_2 + h_3 + h_4 + h_5 + 2h_9 \cos(\theta_2) \\ &\quad + 2h_{11} \cos(\theta_3) + 2h_{10} \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ m_{12} &= h_2 + h_3 + h_5 + h_9 \cos(\theta_2) + 2h_{11} \cos(\theta_3) \\ &\quad + h_{10} \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ m_{13} &= h_3 + h_{11} \cos(\theta_3) + h_{10} \cos(\theta_2 + \theta_3) \\ m_{22} &= h_2 + h_3 + h_5 + 2h_{11} \cos(\theta_3) \\ m_{23} &= h_3 + h_{11} \cos(\theta_3) \\ m_{33} &= h_3 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
r_1 &= gh_8 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + gh_9 \sin(\theta_1 + \theta_2) + gh_6 \sin(\theta_1) \\
&\quad + h_{10} d_1 \sin(\theta_2 + \theta_3) + h_9 d_2 \sin(\theta_2) + h_{11} d_3 \sin(\theta_3) \\
&\quad - c_1 \dot{\theta}_1 \\
r_2 &= gh_8 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) + gh_9 \sin(\theta_1 + \theta_2) \\
&\quad - h_{10} d_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) - h_9 d_4 \sin(\theta_2) + h_{11} d_3 \sin(\theta_3) \\
&\quad - c_2 \dot{\theta}_2 \\
r_3 &= gh_8 \sin(\theta_1 + \theta_2 + \theta_3) - h_{10} d_4 \sin(\theta_2 + \theta_3) \\
&\quad - h_{11} d_5 \sin(\theta_3) - c_3 \dot{\theta}_3
\end{aligned}$$

그리고  $g$ 는 중력가속도이며,  $h_i$ 와  $d_i$ 의 의미는 다음과 같다.

$$\begin{aligned}
h_1 &= m_1 l_1^2 + I_1 & h_2 &= m_2 l_2^2 + I_2 \\
h_3 &= m_3 l_3^2 + I_3 & h_4 &= L_1^2 m_2 + L_1^2 m_3 \\
h_5 &= L_2^2 m_3 & h_6 &= l_1 m_1 + L_1 m_2 + L_1 m_3 \\
h_7 &= l_2 m_2 + L_2 m_3 & h_8 &= l_3 m_3 \\
h_9 &= L_1 l_2 m_2 + L_1 L_2 m_3 & h_{10} &= L_1 l_3 m_3 \\
h_{11} &= L_2 l_3 m_3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
d_1 &= (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)(\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3) & d_2 &= (2\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\dot{\theta}_2 \\
d_3 &= (2\dot{\theta}_1 + 2\dot{\theta}_2 + \dot{\theta}_3)\dot{\theta}_3 & d_4 &= \dot{\theta}_1^2 \\
d_5 &= (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2
\end{aligned}$$

상태방정식을 유도하기 위하여 식(1)은 다음과 같이 다시 정리할 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \\ \ddot{\theta}_3 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ \star & m_{22} & m_{23} \\ \star & \star & m_{33} \end{bmatrix}^{-1} \left\{ \begin{bmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{bmatrix} \ddot{y} - \begin{bmatrix} r_1 \\ r_2 \\ r_3 \end{bmatrix} \right\} \quad (2)$$

위 식을 풀어  $\ddot{\theta}_1, \ddot{\theta}_2, \ddot{\theta}_3$ 를 정리하면 다음과 같은 결과를 얻는다.

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}_1 &= b_{11} r_1 + b_{12} r_2 + b_{13} r_3 - (b_{11} n_1 + b_{12} n_2 + b_{13} n_3) \ddot{y} \\
\ddot{\theta}_2 &= b_{12} r_1 + b_{22} r_2 + b_{23} r_3 - (b_{12} n_1 + b_{22} n_2 + b_{23} n_3) \ddot{y} \\
\ddot{\theta}_3 &= b_{13} r_1 + b_{23} r_2 + b_{33} r_3 - (b_{13} n_1 + b_{23} n_2 + b_{33} n_3) \ddot{y}
\end{aligned}$$

여기서  $b_{ij}$ 는 다음과 같이 정의한다.

$$\begin{aligned}
b_{11} &= \frac{m_{22} m_{33} - m_{23}^2}{\Phi} \\
b_{12} &= \frac{m_{13} m_{23} - m_{12} m_{33}}{\Phi} \\
b_{13} &= \frac{m_{12} m_{23} - m_{13} m_{22}}{\Phi} \\
b_{22} &= \frac{m_{11} m_{33} - m_{13}^2}{\Phi} \\
b_{23} &= \frac{m_{12} m_{13} - m_{11} m_{23}}{\Phi} \\
b_{33} &= \frac{m_{11} m_{22} - m_{12}^2}{\Phi} \\
\Phi &= -m_{11} m_{23}^2 - m_{13}^2 m_{22} - m_{12}^2 m_{33} \\
&\quad + 2m_{12} m_{13} m_{23} + m_{11} m_{22} m_{33}
\end{aligned}$$

여기서 상태벡터  $x_1 = y, \quad x_2 = \theta_1, \quad x_3 = \theta_2, \quad x_4 = \theta_3,$   
 $x_5 = \dot{y}, \quad x_6 = \dot{\theta}_1, \quad x_7 = \dot{\theta}_2, \quad x_8 = \dot{\theta}_3, \quad x_9 = \int_0^t y(\tau) d\tau$ 로 정의

하고  $\ddot{y}$ 를 가속도  $u$ 로 나타내면 최종적인 3단 도립진자의 모델 방정식은 다음과 같은 비선형 상태방정식으로 나타낼 수 있다.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \\ \dot{x}_5 \\ \dot{x}_6 \\ \dot{x}_7 \\ \dot{x}_8 \\ \dot{x}_9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_5 \\ x_6 \\ x_7 \\ x_8 \\ u \\ b_{11} r_1 + b_{12} r_2 + b_{13} r_3 - (b_{11} n_1 + b_{12} n_2 + b_{13} n_3) u \\ b_{12} r_1 + b_{22} r_2 + b_{23} r_3 - (b_{12} n_1 + b_{22} n_2 + b_{23} n_3) u \\ b_{13} r_1 + b_{23} r_2 + b_{33} r_3 - (b_{13} n_1 + b_{23} n_2 + b_{33} n_3) u \\ x_1 \end{bmatrix} \quad (3)$$

$f(x, u)$

상태변수의 마지막 요소인  $\int_0^t y(\tau) d\tau$ 는 cart의 위치 정상 상태에 대한 오차를 없애기 위해 추가한 항이다. 3단 도립진자의 모델식은 cart에  $j$ 축 방향의 수평운동만이 발생할 수 있고 그 외의 수평운동과 회전운동은 발생하지 않는 것을 가정하고 있다. 그리고 1단 진자와 2단 진자는 각 hinge에서  $i$ 축 방향의 회전축을 중심으로 한 회전만이 존재하는 것을 가정한다. 모델식에서 고려한 마찰력은 속도에 선형적인 관계를 갖는 마찰만을 고려하며 비선형적 관계를 갖는 정지마찰과 Coulomb 마찰은 고려하지 않고 있다. 따라서 위의 모델을 이용하여 3단 도립진자의 swing-up 제어를 모델 기반으로 수행하기 위해서는 이러한 가정에 최대한 부합하도록 기구부를 설계하여야 한다.

## 2. 3단 도립진자의 기구부 및 구동부

이 논문에서 제안되는 3단 도립진자의 기구적 구조는 그림 2와 같다. 그림에서 A는 3단 진자를 나타내며, B는 cart와 엔코더를 포함한 기구부, C는 rail, D는 idler pulley가 설치된 레일 고정부, E는 timing pulley와 모터가 결합된 또 다른 rail 고정부이다. cart로의 동력 전달은 pulley와 timing

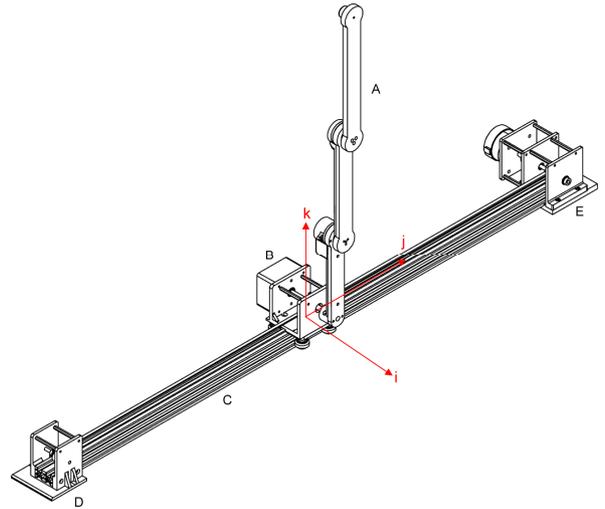


그림 2. 제안되는 3단 도립진자의 기구적 구조.

Fig. 2. The mechanical structure of the proposed triple inverted pendulum.

belt를 이용하는 방식을 채택하고 있으며 rail은 3D 프린터에서 자주 사용되는 V-slot 구조의 2040 알루미늄 프로파일을 이용하였다. B, D, E의 기구부는 PLA 소재를 이용하여 3D 프린터로 제작하였으며 진자부는 회전축 부위에 bearing을 사용하므로 높은 수치 정밀도를 얻기 위해 아세탈을 CNC로 가공하는 방식으로 제작하였다. 모델 적합성이 우수하도록 3단 도립진자를 설계하기 위한 방식은 기본적으로 [12]에서 2단 도립진자의 설계에서 사용했던 방식과 동일하다. 따라서 [12]에서 사용하였던 설계 방식을 3단 도립진자의 설계에도 그대로 활용하였다. 이 절에서는 3단 도립진자의 경우만을 고려하기 위해 필요한 2가지 사항에 대해서 집중적으로 다루고자 한다. 첫 번째는 3단 도립진자의 자유로운 회전이 가능하게 하는 기구부의 구조이고 두 번째는 2단 도립진자에 비해 하나의 진자가 더 추가됨으로 인해 발생하는 부하 증가를 해결하기 위한 새로운 구동부 드라이버의 구조이다.

그림 3은 자유로운 회전이 가능하게끔 설계한 3단 도립진자의 단면도와 encoder wire의 배선을 보여주는 그림이다. 특히 3단 도립진자의 경우 2단 도립진자와 달리 3단 진자의 encoder를 통해 측정된 회전 정보가 1단 진자와 2단 진자의 연결 부위를 관통해 slip ring에 연결되어야 하므로 이를 위하여 특별히 설계한 중공축(hollow shaft) revolute joint를 사용하였다. 그림 4는 1단과 2단 진자의 연결 부위에 대한 분해도를 보여준다. 이러한 구조로 인해 3단 도립진자의 모든 진자가 자유롭게 회전하며 각 진자의 회전 정보를 control board로 전송하는 것이 가능하다.

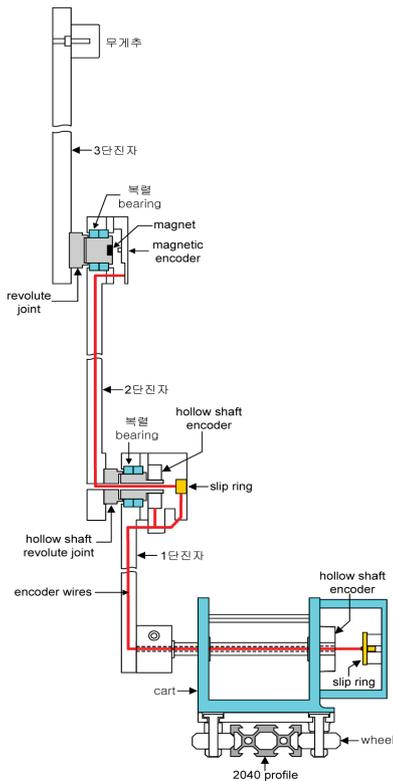


그림 3. 제안되는 3단 도립진자의 단면도와 encoder 배선.  
Fig. 3. The cross section of the proposed triple inverted pendulum.

3단 도립진자의 경우 2단 도립진자에 비해 진자 하나가 더 추가되고 더불어 encoder도 추가 사용되므로 cart를 포함한 3단 도립진자의 무게는 2단 도립진자에 비해 증가할 수밖에 없다. 이로 인해 구동기로 사용되는 BLDC motor가 더 큰 부하를 견디며 cart의 속도 제어를 수행하여야 한다. swing-up 과정과 선형 제어 과정 중 BLDC가 빈번한 정역 제어를 수행해야 하는데 이로 인해 순간적으로 motor driver의 허용전류보다 큰 전류가 흘러 inverter가 손상되는 일이 자주 생기게 된다. [12]에서 2단 도립진자의 swing-up 제어를 위해 사용한 BLDC motor driver에는 ST Microelectronics사의 L6234를 사용하였다. L6234는 견딜 수 있는 peak current가 5A 정도이고 이는 3단 도립진자의 swing-up을 위해 필요한 전류용량에는 많이 부족하다고 할 수 있다. 또한 [12]에서는 50W의 BLDC를 사용하였으나 증가된 무게의 부하를 고려하기 위해 이 논문에서는 80W의 BLDC를 사용하였다. 이로 인해 보다 높은 용량의 BLDC motor를 구동할 수 있는 BLDC driver의 설계가 필요하였다.

그림 5는 이를 위해 새로이 설계된 BLDC motor driver의 구조를 보여준다. 10A의 continuous current로 구동이 가능한 Texas Instruments사의 inverter인 BOOSTXL-DRV8301을 사용하여 높은 용량의 BLDC motor에 대응할 수 있도록 하였으며 Hall sensor 신호와 PWM/Direction 신호를 입력받아 6-step commutation에 필요한 gate 구동 신호를 생성하여 BOOSTXL-DRV8301에 공급하는 하드웨어 logic을 구현하였다. 해당 logic은 XC9536XL이라는 CPLD 소자를 이용하여

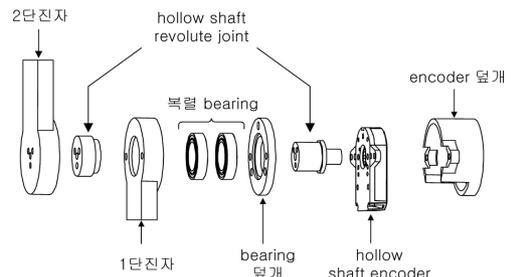


그림 4. 1단과 2단진자 연결부의 분해도.  
Fig. 4. The exploded view of the connection between first and second pendulums.

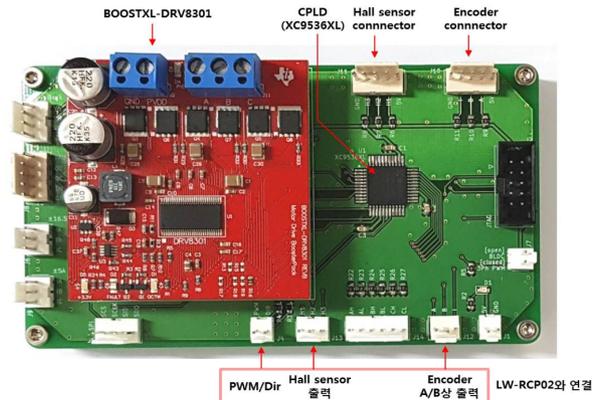


그림 5. 제안되는 BLDC motor driver의 구조.  
Fig. 5. The structure of the proposed BLDC motor driver.

VHDL로 구현하였다. 그림의 하단부에 보이는 PWM/Dir, Hall sensor 출력, Encoder A/B상 출력은 LW-RCP02와 연결되어 BLDC의 속도제어를 Simulink 기반으로 손쉽게 구현하기 위한 신호를 제공한다.

### III. LW-RCP02를 이용한 3단 도립진자의 Swing-up 제어

#### 1. LW-RCP02 소개

제작된 3단 도립진자의 swing-up 제어기는 연구실에서 제작한 LW-RCP02를 기반으로 구현하였다. LW-RCP02를 이용한 제어기 설계에서 제어 연산은 PC에서 실행되고 있는 Simulink가 담당한다. 하지만 PC는 제어에 필요한 입/출력을 다룰 수 있는 기능을 갖추지 못했기 때문에 입/출력과 관련한 task는 LW-RCP02 hardware unit이 담당한다. LW-RCP02 unit의 입력 장치를 통해 취득한 센서 정보가 high-speed USB 통신을 통해 PC로 전송되고 PC에서 실행 중인 Simulink 기반의 제어기 모델은 전달받은 센서 정보를 기반으로 제어량을 계산한다. 계산된 제어량은 다시 high-speed USB 통신을 통해 LW-RCP02 unit으로 전달되어 관련 출력 장치를 통해 제어량을 물리적으로 적용함으로써 한 번의 제어 loop가 완성된다. 그림 6은 LW-RCP02와 PC의 상호작용 과정을 흐름도로 나타낸 것이다.

high-speed USB 통신을 기반으로 PC와 LW-RCP02가 정보를 교환하므로 두 장치 간의 통신 지연은 high-speed USB 통신의 microframe 발생 주기인  $125\mu s$ 를 넘지 않으며 LW-RCP02를 통해서 최대 2KHz까지의 샘플링 주파수를 갖는 제어 시스템의 실시간 제어 구현이 가능하다. LW-RCP02 unit에서 담당하는 입/출력 기능은 Simulink 기반의 입/출력 library block를 이용하여 손쉽게 제어할 수 있다. 따라서 제어기 설계자는 입/출력을 고려하기 위한 embedded hardware 기반의 C programming과 지루한 debugging에 대한 염려 없이 상위 수준의 사고에 기반하여 주어진 문제 자체에만 집중할 수 있는 장점이 있다. 그림 7은 LW-RCP02에서 지원하는 Simulink 기반의 block library의 종류를 보여준다.

LW-RCP02는 연구실에서 이전에 개발하였던 LW-RCP01보다 확장된 입/출력 기능을 갖는 것을 특징으로 한다. 예를 들면, 제안되는 3단 도립진자의 경우 구동부의 encoder 1개, 3개의 진자 각도를 측정하는 encoder 3개가 필요해 모두

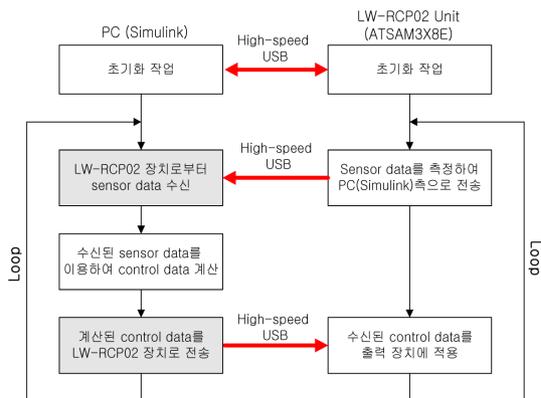


그림 6. LW-RCP02의 동작 방식.

Fig. 6. The flowchart of the LW-RCP02 operation.

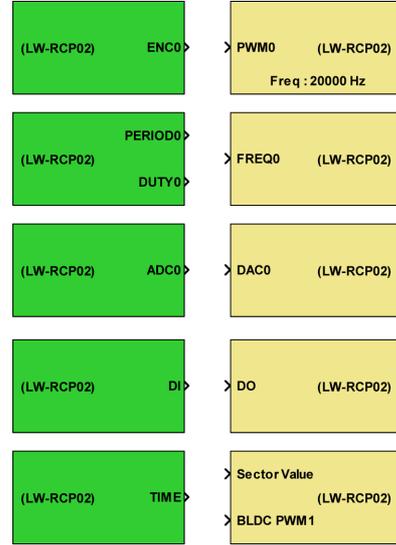


그림 7. LW-RCP02에서 지원하는 Simulink 기반의 입/출력 library block.

Fig. 7. Simulink-based input/output library blocks supported by LW-RCP02.

표 1. LW-RCP02의 입/출력기능 세부사항.

Table 1. I/O function details of LW-RCP02.

	기능	세부사항
Input	Encoder counter	8 channel (32-bit)
	ADC	8 channel (12-bit)
	Digital input	8-bit
	Period and duty	4 channel
	Time/Time difference	resolution : microsecond
Output	PWM	7 channel
	DAC	4 channel (14-bit)
	Digital output	8-bit
	Frequency	4 channel (40,000 Hz)
	BLDC PWM	2 channel

4개의 encoder에 대한 counting을 처리할 수 있어야 한다. 이전의 LW-RCP01의 경우 2개의 encoder만 처리할 수 있는데 비해 LW-RCP02는 모두 8개의 encoder를 동시에 처리할 수 있다. 표 1은 LW-RCP02의 입/출력 기능을 세부적으로 정리한 것이다.

#### 2. 2자유도 제어기 구조

제안된 3단 도립진자의 swing-up 제어를 위하여 [10]과 [11]에서 사용되었던 2자유도 제어기 구조를 사용하기로 한다. 그림 8은 swing-up 제어를 위해 사용하는 2자유도 제어기 구조에 대한 개념도를 나타낸다. 그림에서와 같이 2자유도 제어기에서는 feedforward controller와 feedback controller를 함께 사용한다. feedforward controller는 swing-up이 이루어지도록 모델방정식을 기반으로 계산된 가속도 궤적  $u^*$ 를 3단 도립진자에 인가하는 역할을 하고 feedback controller는 swing-up이 이루어지도록 모델방정식을 기반으로 계산된 상태변수의 궤적  $x^*$ 과 실제로 발생하는 상태변수의 궤적  $x$

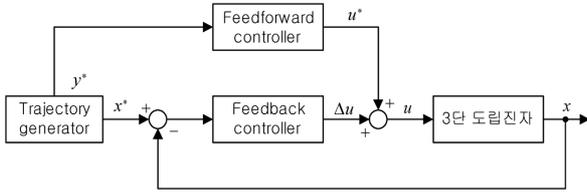


그림 8. 2 자유도 제어기의 구조.  
Fig. 8. The structure of a two-degree-of-freedom controller.

사이에서 발생하는 오차를 보상하여 swing-up 제어의 견실성을 높이는 역할을 한다.

3. Feedforward 궤적의 계산

2자유도 제어기의 구현에 필요한 가속도 및 상태변수의 궤적  $u^*$ 와  $x^*$ 는 3단 도립진자의 모델방정식, 2점 경계치 조건, 그리고 입/출력 제약조건을 만족하는 비선형 최적제어 문제를 풀어 계산하게 된다. 3단 도립진자의 swing-up 제어가 만족해야 할 경계치 조건은 다음과 같다.

$$x(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ -\pi \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, x(T) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (4)$$

여기서  $T$ 는 swing-up에 소요되는 시간을 나타낸다.  $x(0)$ 의 값이 의미하는 것은 최초로 3단 도립진자가 바닥을 향해 늘어져 있는 상태를 의미하고  $x(T)$ 는 3단 도립진자가 도립되어 rail의 중앙에 정지해 있는 상태를 나타낸다. 제한되는 3단 도립진자의 swing-up 과정동안 cart의 운동이 만족해야 할 제약조건은 다음과 같다.

$$|y| \leq 0.5 \text{ m}, |\dot{y}| \leq 2.0 \text{ m/s}, |\ddot{y}| \leq 30 \text{ m/s}^2 \quad (5)$$

$u^*$ 와  $x^*$ 를 구하는 최적화 문제는 따라서 다음과 같이 정리할 수 있다.

$$\begin{aligned} &\text{Minimize} \quad \int_0^t [1 + R^2 u(\tau) d\tau] \\ &\text{subject to} \quad \text{dynamic equation} \quad (3) \\ &\quad \quad \quad \text{boundary conditions} \quad (4) \\ &\quad \quad \quad \text{input/output constraint} \quad (5) \end{aligned} \quad (6)$$

여기서  $R$ 은 가중치로써  $R=0$ 일 경우 최단시간에 swing-up 하는 궤적을 구하게 되고,  $R \neq 0$ 일 경우 swing-up 시간과 가속도 사용량의 비중을 조절하여 swing-up 궤적을 구하게 된다. 식 (6)의 최적화 문제를 풀어 swing-up feedforward 궤적  $u^*$ 와  $x^*$ 를 구하기 위해서는 3단 도립진자가 갖는 물리 parameter ( $m_i, l_i, I_i, c_i, i=1, 2, 3$ )를 정확히 구해야 한다. 제안된 3단 도립진자의 물리 parameter의 값은 2단 도립진자의 물리 parameter 추정을 다룬 [12]의 결과를 사용하여 구할 수 있다. 표 2는 추정된 3단 도립진자의 물리 parameter 값을 보여주고 있다.

식 (6)의 궤적 최적화 문제는 [15]에서 다루고 있는 direct

표 2. Parameter 추정을 이용하여 구한 3단 도립진자의 물리 parameter.

Table 2. Physical parameters of a triple inverted pendulum obtained using parameter estimation.

	$i = 1$	$i = 2$	$i = 3$
진자 길이 $L_i$ (m)	0.1645	0.210	0.245
질량 $m_i$ (kg)	0.2297	0.1345	0.1644
무게중심까지의 길이 $l_i$ (m)	0.0819	0.1239	0.1532
회전 관성 모멘트 $I_i$ (kgm <sup>2</sup> )	$1.269 \times 10^{-3}$	$9.371 \times 10^{-4}$	$1.744 \times 10^{-3}$
마찰계수 $c_i$ (Nms/rad)	$1.293 \times 10^{-3}$	$1.626 \times 10^{-6}$	$3.305 \times 10^{-4}$

transcription method를 이용하여 풀이할 수 있다. 또는 GPOPS-II와 같은 상용 solver를 이용할 수도 있다[16]. 표 2의 물리 parameter가 실제 도립진자의 동특성을 정확히 묘사하는 parameter인지의 여부는 최적화 문제의 해로 얻어진 가속도 feedforward 궤적  $u^*$ 를 실제 도립진자에 인가하는 실험을 수행했을 때 결과적으로 발생하는 도립진자의 상태변수 측정값 궤적이 최적화 문제의 해  $x^*$ 와 최대한 오랜 시간 동안 유사한 형태를 보이는 것으로 검증할 수 있다.

이것을 검증하기 위해 LW-RCP02의 IO block을 이용하여 그림 9와 같은 Simulink model을 구성하였다. 그림 9의 Simulink model은 그림 8의 2자유도 제어기를 Simulink block을 이용하여 구현하였으며 더불어 swing-up이 이루어진 후 도립상태를 유지하기 위한 선형 LQ 제어기도 포함하고 있다. 그림 9에서  $u\_star, x\_star, K\_star$ 는 Simulink의 From Workspace block으로 구성하였다.  $u\_star$ 는 시간에 따른 가속도 feedforward 궤적  $u^*$ 의 정보를 행렬 형태로 담고 있으며  $x\_star$ 는 시간에 따른 상태변수 feedforward 궤적  $x^*$ 의 정보를 가진다.  $K\_star$ 는 시간에 따른 시변 LQ 제어기의 제어기 이득 정보를 나타내는데 이 이득은 시변 시스템에 대한 Riccati differential equation을 통해 구하게 된다. 시변 LQ 제어 이득을 구하는 과정은 [10]의 방법을 따르기로 한다. 그림 9에서 Triple inverted pendulum의 이름을 갖는 block은 subsystem으로 그 내부의 구성은 그림 10와 같다. 그림 10에서 볼 수 있듯이 입/출력의 처리와 관련된 부분은 LW-RCP02의 IO block으로 구성되어 있다. 그림 10에서는 4개의 encoder block을 이용하여 cart의 위치정보, 그리고 진자 3개의 각변위 정보를 측정하고 1개의 PWM block이 사용되어 BLDC motor를 구동하기 위한 구동신호를 발생한다. LW-RCP02의 IO block의 사용을 통해 제어기 설계는 입/출력 처리에 대한 하드웨어적 고민없이 상위수준의 사고만으로 제어기 설계와 실험에만 집중할 수 있다. 그림 9의 Simulink model을 rapid accelerator mode로 실행할 때 이와 통신하는 LW-RCP02 hardware unit과 BLDC motor driver와의 결선도는 그림 11과 같다.

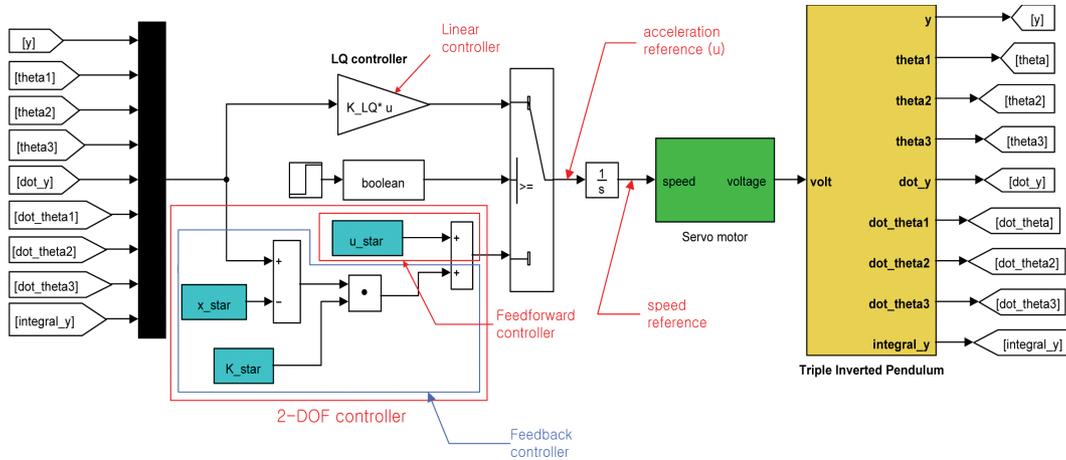


그림 9. Simulink로 구현한 3단 도립진자의 swing-up 제어 block diagram.

Fig. 9. The swing-up control block diagram of a triple inverted pendulum implemented using Simulink.

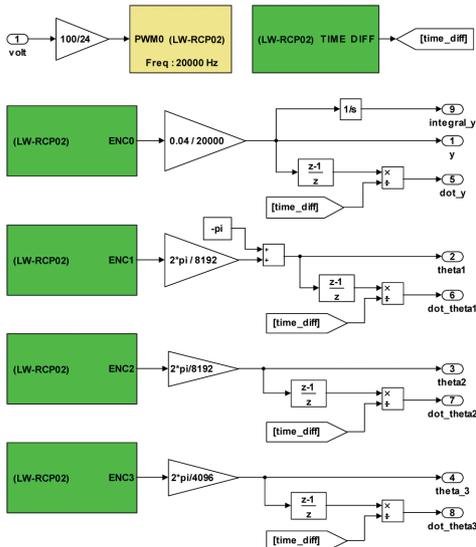


그림 10. LW-RCP02 library block을 이용하여 구현한 3단 도립진자 block의 내부.

Fig. 10. Inside of the triple inverted pendulum block implemented using LW-RCP02 library blocks.

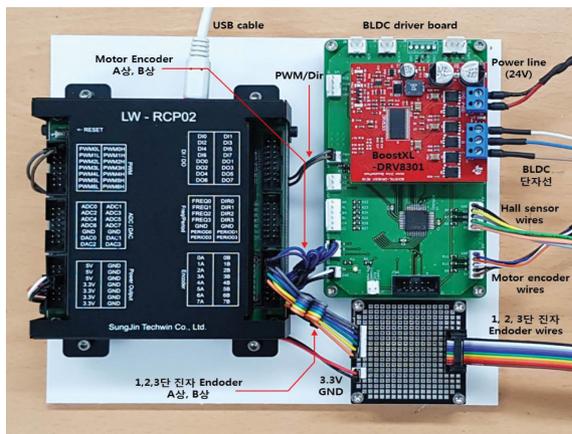


그림 11. LW-RCP02 unit과 BLDC driver의 결선도.

Fig. 11. The wiring of the LW-RCP02 unit and the BLDC driver.

4. Feedforward 제어가 실험 결과

그림 9의 Simulink model에서 feedback controller는 사용하지 않고 feedforward controller 만을 사용하여 swing-up 실험을 수행하고 이때 발생한 진자의 실제 각변위 궤적을 계산된 궤적과 비교하여 보았다. 그림 12, 13, 14는 각각  $\theta_1$ ,  $\theta_2$ ,  $\theta_3$ 의 궤적을 비교하여 나타낸 것이다. 여기서 파란선은 계산된 feedforward 궤적을 나타내고 빨간선은 실제의 각변위 궤적을 나타낸다. swing-up이 완료되기까지의 시간은 3.8 초로 계산되었다. 그림을 통해 3개의 궤적은 0초에서 2.5초까지는 유사한 응답특성을 보여주고 있고 그 이후의 시간대에서는 차이가 발생하는 것을 볼 수 있다. 이것은 feedforward control 만 적용하였을 때 피할 수 없는 현상이며 특히 3단 도립진자 시스템은 도립의 상태가 불안정하기 때문에 이러한 차이가 더 두드러진다. 하지만 2.5초까지의 응답 유사성은 추정을 통해 얻어진 표 2의 parameter 값이 시스템의 동특성을 충분히 잘 반영하는 값이라는 것을 보여준다.

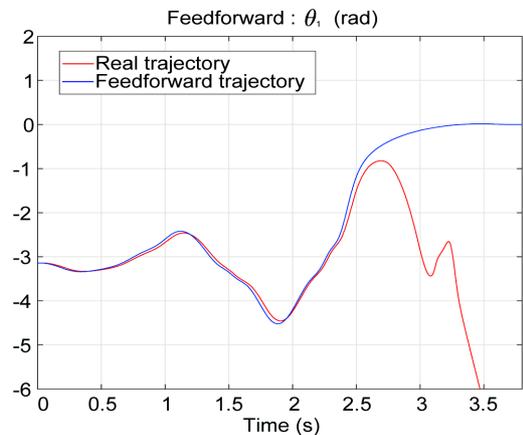


그림 12. Feedforward controller만을 적용하였을 때의  $\theta_1$  궤적의 비교.

Fig. 12. The actual response and model response for  $\theta_1$  when only feedforward control is applied.

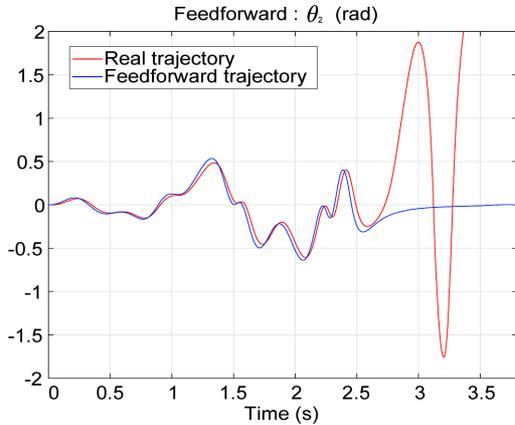


그림 13. Feedforward controller만을 적용하였을 때의  $\theta_2$  궤적의 비교.

Fig. 13. The actual response and model response for  $\theta_2$  when only feedforward control is applied.

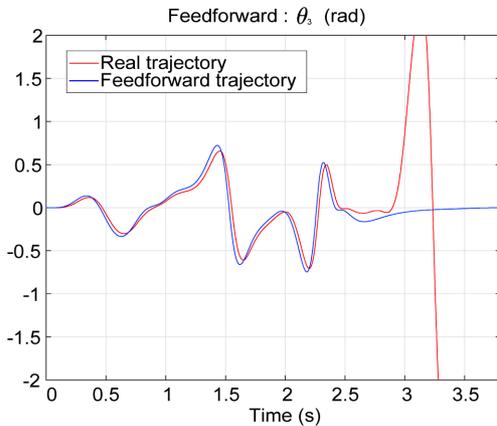


그림 14. Feedforward controller만을 적용하였을 때의  $\theta_3$  궤적의 비교.

Fig. 14. The actual response and model response for  $\theta_3$  when only feedforward control is applied.

5. 2 자유도 제어기 실험 결과

그림 9의 Simulink model에서 feedforward와 feedback을 함께 사용하여 2자유도 형태의 제어기로 swing-up 제어를 수행하였다. 그림 15, 16, 17은 이때 발생한 각변위의 실제 궤적을 계산된 feedforward 궤적과 비교하여 나타난 것이다. 2자유도 제어기를 적용하였을 때는 2개의 궤적이 매우 유사하게 나타나는 것을 볼 수 있으며 이것은 swing-up을 통한 도립상태로 3단 도립진자가 수렴하는 것을 나타낸다. 그림 18은 3단 도립진자의 swing-up 제어를 실험한 영상을 Youtube에 upload 한 후 Youtube 화면을 캡처한 그림이다. 실제 Youtube 영상의 주소는 <https://youtu.be/lbJfh0MOcp0> (영상제목 : Swing-up control of a triple inverted pendulum, Channel 이름 : Embedded Control Lab.)로 실험결과를 영상을 통해 확인할 수 있다.

제안된 도립진자의 제어 성능적 특징과 구동부의 특징을 기존의 결과 [10], [11] 등과 비교해 보면 다음과 같은 특징을 가진다. 식 (5)에서 주어진  $y$ 의 변위 제약은 [10]이나

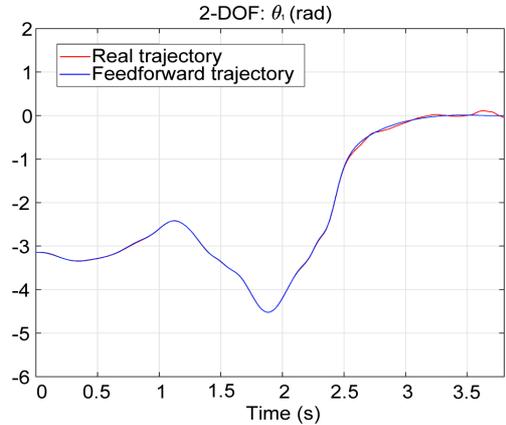


그림 15. 2자유도 제어기를 적용하였을 때의  $\theta_1$  궤적의 비교.

Fig. 15. The actual response and model response for  $\theta_1$  when 2-DOF control is applied.

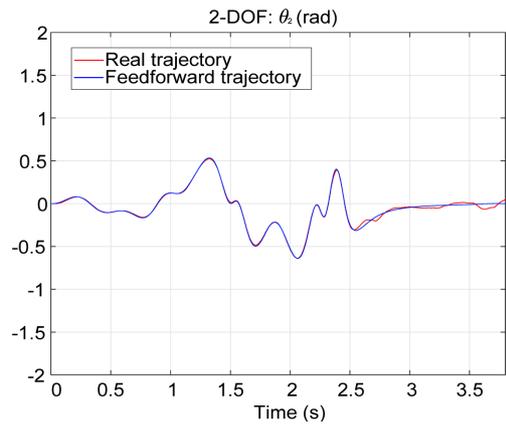


그림 16. 2자유도 제어기를 적용하였을 때의  $\theta_2$  궤적의 비교.

Fig. 16. The actual response and model response for  $\theta_2$  when 2-DOF control is applied.

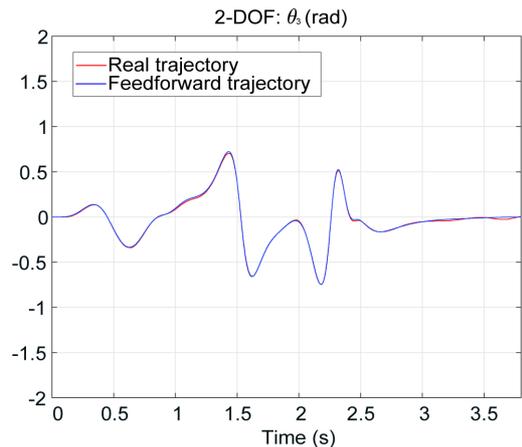


그림 17. 2자유도 제어기를 적용하였을 때의  $\theta_3$  궤적의 비교.

Fig. 17. The actual response and model response for  $\theta_3$  when 2-DOF control is applied.

[11]에서의 제약보다 더 작는데 이것은 제안된 3단 도립진자의 각 진자부 길이가 [10]이나 [11]에서 사용된 진자의

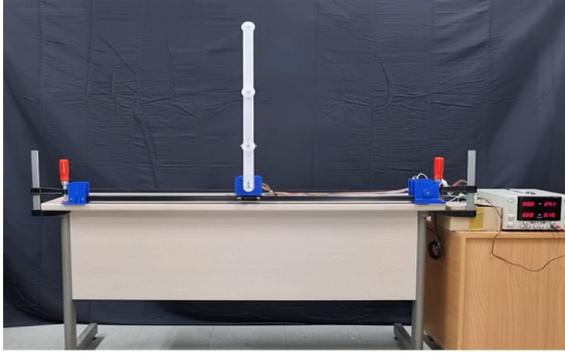


그림 18. 3단 도립진자의 swing-up 제어에 대한 Youtube 영상.  
Fig. 18. The Youtube video for swing-up control of the triple inverted pendulum.

길이보다 짧기 때문에 더 짧은 길이의 rail에서 swing-up을 수행하는 것이 가능하기 때문이다. 또한 [10]이나 [11]에서의 사용된 진자는 제안된 3단 도립진자보다 무게는 약 4배, 관성모멘트는 약 10배정도 더 크기 때문에 이를 감당하기 위해 고가의 3상 서보모터를 이용하여 cart를 구동한다. 하지만 본 논문에서는 줄어든 진자의 무게, 길이, 관성모멘트 등으로 인해 비교적 저용량의 BLDC를 이용하여 cart에 대한 속도제어를 수행하는 장점이 있다.

#### IV. 결론

이 논문에서는 기존 결과에 비해 제작이 용이한 3단 도립진자의 구조를 제안하였다. 수학적 모델과의 정합성을 유지할 수 있도록 저자들이 제안한 2단 도립진자 제작에 관한 결과를 3단 도립진자에 제작에 확장하여 적용하였다. 3단 진자 전체가 자유로운 회전을 할 수 있게 하기 위해 slip ring과 증공축 revolute joint를 활용한 기구적 구조를 새롭게 제안하였다. 제안된 결과는 추후 3단 도립진자를 제작해보려는 다른 연구진들에게 좋은 참고자료로 활용될 수 있을 것으로 생각한다. 제안된 3단 도립진자는 2단 도립진자의 제어에 사용된 2자유도 구조의 제어방식을 확장 적용하여 swing-up 제어를 수행하였다. 이를 위하여 연구실에서 개발한 LW-RCP02를 이용하여 제어기 구현과정을 효율적으로 진행할 수 있었다. parameter 추정과정을 통해 매우 정확한 모델을 구할 수 있음을 확인하였고 swing-up 제어 실험의 결과는 이를 뒷받침하였다. 본 논문에서는 아래로 완전히 늘어진 상태를 초기상태로 하고 위로 완전히 직립한 상태를 최종으로 swing-up 제어를 수행하였다. 하지만 3단 도립진자는 모두 8개의 평형점(equilibrium point)을 가지며 이들 평형점 사이를 전환하는 제어 방식은 모두 56가지가 존재한다. 3단 도립진자에서의 전환제어 문제는 난이도 높은 새로운 형태의 제어 문제로서의 가치를 가진다. 추후 3단 도립진자의 전환제어에 대한 연구를 통해 도립진자에서 발생할 수 있는 모든 유형의 제어문제에 대한 해를 찾는 연구를 진행해 보고자 한다. 최근 제어분야에 인공지능을 접목한 연구들이 활발하게 보고되고 있다. 1단 도립진자에 대해서는 강화학습 기반의 제어 문제가 [17]에서 제안되었다.

본 논문에서 제안한 3단 도립진자는 제어의 난이도를 고

려했을 때 향후 인공지능 기반의 제어기법이 갖는 잠재력을 검증하는데 있어 매우 유용하게 활용될 수 있을 것으로 기대된다.

#### REFERENCES

- [1] K. Ogata, *Modern Control Engineering*, Prentice Hall, 2010.
- [2] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*, Pearson, 2020.
- [3] K. J. Åström and K. Furuta, "Swinging up a pendulum by energy control," *Automatica*, vol. 36, no. 2, pp. 287-295, 2000.
- [4] R. Lozano, I. Fantoni, and D. J. Block, "Stabilization of the inverted pendulum around its homoclinic orbit," *System and Control Letters*, vol. 40, pp. 197-204, 2000.
- [5] Y. S. Lee, J. J. Oh, S. Y. Shim, H. Lim, and J. H. Seo, "Swing-up control for a rotary inverted pendulum with restricted rotation range," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 14, no. 6, pp. 548-553, 2008.
- [6] Y. S. Lee, D. Ju, and C. Choi, "Development of educational environment to improve efficiency of online education on control systems," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 27, no. 12, pp. 1056-1063, 2021.
- [7] M. Iwase, K. J. Åström, K. Fruta, and J. Åkesson, "Analysis of safe manual control by using Furuta pendulum," *Proceedings of the IEEE International Conference on Control Applications*, pp. 568-572, 2007.
- [8] M. W. Spong, P. Corke, and R. Lozano, "Nonlinear control of the reaction wheel pendulum," *Automatica*, vol. 37, pp. 1845-1851, 2001.
- [9] J. Rubi, A. Rubio, and A. Avello, "Swing-up control problem for a self-erecting double inverted pendulum," *IEE Proceedings-Control Theory and Applications*, vol. 149, no. 2, pp. 169-175, 2002.
- [10] K. Graichen, M. Treuer, and M. Zeitz, "Swing-up of the double pendulum on a cart by feedforward and feedback control with experimental validation," *Automatica*, vol. 43, pp. 63-71, 2007.
- [11] T. Glück, A. Eder, and A. Kugi, "Swing-up control of a triple pendulum on a cart with experimental validation," *Automatica*, vol. 49, pp. 801-808, 2013.
- [12] D. Ju, C. Choi, J. Jeong, and Y. S. Lee, "Design and parameter estimation of a double inverted pendulum for model-based swing-up control," *Journal of Institute of Control, Robotics and Systems (in Korean)*, vol. 28, no. 9, pp. 793-803, 2022.
- [13] "Quanser official home page," [www.quanser.com](http://www.quanser.com), Accessed: 2022-09-01.
- [14] Y. S. Lee, B. Jo, and S. Han, "A light-weight rapid control

prototyping system based on open source hardware,” *IEEE Access*, vol. 5, no. 1, pp. 11118-11130, 2017.

- [15] M. Kelly, “An introduction to trajectory optimization: How to do your own direct collocation,” *SIAM Review*, vol. 59, no. 4, pp. 849-904, 2017.
- [16] “GPOPS-II official home page,” [www.gpops2.com](http://www.gpops2.com), Accessed: 2022-08-10.
- [17] J. Baek, H. Jun, J. Park, H. Lee, and S. Han, “Sparse variational deterministic policy gradient for continuous real-time control,” *IEEE Transactions on Industrial Electronics*, vol. 68, no. 10, pp. 9800-9810, 2020.



### 최창규

2021년 인하대학교 전기공학과 졸업.  
2021년~현재 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학과 석사과정 재학 중. 관심분야는 최적제어, 로봇공학, 예측제어.



### 주도윤

2021년 군산대학교 기계융합시스템공학부 졸업. 2021년~현재 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학과 석사과정 재학 중. 관심분야는 임베디드 시스템, 메카트로닉스, 최적제어.



### 정종익

2022년 인하대학교 전기공학과 졸업.  
2022~현재 인하대학교 대학원 전기컴퓨터공학과 석사과정 재학 중. 관심분야는 비선형 제어, 최적제어, 임베디드 시스템.

## 이영삼

제어·로봇·시스템학회 논문지, 제15권 제4호 참조.